NOTAS DE MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Alma Virginia Lara Sagahón, Vladislav Khartchenko, Antonio Trejo Lugo, Angélica Espinosa Godínez, José Luis Garza Rivera

Índice

1. Introducción

Estamos familiarizados con la utilización de cuadros o tablas para presentar cantidades o datos de manera resumida. Se puede decir que esta forma de presentación es un ejemplo de lo que en matemáticas se conoce como matriz. La representación con matrices tiene orígenes antiguos, pues se ha encontrado en escritos babilonios (300 ac) y chinos (200 a 100 ac). Sin embargo, los conceptos presentados en los textos contemporáneos tienen sus fundamentos en trabajos desarrollados a partir del siglo XVII, en ese siglo tanto el japonés Seki Kowa (À1630/1642?-1708) como G. W. Leibniz (1646-1716) presentaron independientemente la teoría de determinantes. Gabriel Cramer (1704-1752) publicó en el año 1750 la solución de sistemas de ecuaciones lineales que lleva su nombre. El término matriz fue acuñado por el matemático inglés James Joseph Silvester (1814-1897), pues consideró que una matriz es la madre de los determinantes menores, Silvester en colaboración con Arthur Caley (1821-1895) iniciaron la teoría de matrices. Las matrices y los determinantes están estrechamente relacionados con la solución de sistemas de ecuaciones y han tenido una amplia aplicación en diversas disciplinas científicas.

Objetivo General. Aplicar los conceptos básicos de la teoría de matrices y determinantes en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

2. Matrices

Prerrequisitos

- Conjuntos de números.
- Números complejos.

Objetivos específicos

- Explicar el concepto de matriz.

Definición. Una matriz es un arreglo rectangular de números colocados en renglones (filas) y columnas dentro de paréntesis o corchetes.

Ejemplo 2.1

A y B son ejemplos de matrices con paréntesis y corchetes, respectivamente.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 \\ -4 & 5 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

El **tamaño**, **orden** o **dimensión** de una matriz se denota como $m \times n$ donde m

es el número de renglones o filas y n es el número de columnas. En el Ejemplo 1 la matriz A es de tamaño 3×3 y la matriz B es de tamaño 2×4.

En términos generales es común representar a las matrices con letras mayúsculas y con letras minúsculas a sus elementos, los cuales se colocan entre corchetes o paréntesis. De este modo

$$A = (a_{ij}),$$

es una matriz cuyos elementos a_{ij} están colocados en la fila (renglón) i y la columna j.

Ejemplo 2.2

Dada la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Indica a que es igual el elemento b_{32}.

b_{32} es el elemento del renglón 3 y la columna 2.

Respuesta: $b_{32} = 1$

La siguiente es la **representación general** de una matriz de tamaño $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La **igualdad de matrices** se define para matrices del mismo tamaño, es decir si tenemos las matrices del mismo tamaño $A_{m \times n} = (a_{ij})$ y $B_{m \times n} = (b_{ij})$ se dice que son iguales si para toda i y j, tenemos $a_{ij} = b_{ij}$.

3. Tipos de matrices

Prerrequisitos

- Conjuntos de números.
- Números complejos.

Objetivos específicos

- Reconocer los diversos tipos de matrices.

A continuación se describen algunas de las formas de matrices que se emplean con más frecuencia.

Matriz o vector fila. Es una matriz de orden $1 \times n$, es decir, consta de un renglón (fila) y n columnas, la cual se denota como

$$A_{1\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Matriz o vector columna. Es una matriz de orden $m \times 1$, es decir, consta de m renglones y una sola columna, se puede denotar como:

$$A_{m\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Matriz nula. Es una matriz $A_{m\times n}$ en la que todos sus elementos son iguales a cero, también se denomina **matriz cero**.

Ejemplo 3.1

Dadas las matrices A, B y C, indica el tipo de matriz y el orden correspondiente.

$$A = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Respuesta:
A es una **matriz columna** de orden 3×1,
B es una **matriz fila** de orden 1×4,
C es una **matriz cero** de orden 3×2.

Matriz cuadrada. Es una matriz en la cual el número de renglones es igual al número de columnas, es decir es una matriz $A_{m\times n}$ donde $m = n$, también es costumbre decir que una matriz cuadrada es de orden n.

En una matriz cuadrada la **diagonal principal** la conforman los elementos a_{ij} donde $i = j$.

La **diagonal secundaria** está formada por los elementos a_{ij} donde $i + j = n + 1$.

Ejemplo 3.2

Dada la matriz cuadrada

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 10 & 0 & -8 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix},$$

indica cuáles son los elementos de la diagonal principal y cuáles los de la diagonal secundaria..
Respuesta:

Los elementos de la diagonal principal son $a_{11} = -1$, $a_{22} = 0$ y $a_{33} = 7$.

Los elementos de la diagonal secundaria son $a_{13} = -5$, $a_{22} = 0$, y $a_{31} = 2$.

Matriz diagonal. Es una matriz cuadrada en la cual los elementos a_{ij} donde $i \neq j$ son todos iguales a cero, mientras que los elementos de la diagonal principal pueden adquirir cualquier valor.

Matriz escalar. Es una matriz diagonal en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales, es decir $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn}$.

Matriz triangular superior. Es una matriz cuadrada en la que todos los elementos por debajo de la diagonal principal son iguales a cero.

Matriz triangular inferior. Es una matriz cuadrada en la cual todos los elementos por encima de la diagonal principal son iguales a cero.

Ejemplo 3.3

Dadas las matrices A, B y C, indica el tipo de matriz y el orden correspondiente.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Respuesta:

A es matriz diagonal de orden 4,

B es matriz triangular inferior de orden 3,

C es matriz triangular superior de orden 4.

Matriz identidad. Es una matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales a uno, usualmente se denota con la letra I. La notación general de una matriz identidad es:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Las matrices identidad de orden 2, 3 y 4 son

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matriz transpuesta. Dada una matriz $A_{m\times n}$, la matriz transpuesta de A es la matriz que se obtiene al intercambiar los renglones de A por sus columnas, se denota como $A^T_{n\times m}$.

Ejemplo 3.4

Sea

$$A_{2\times 4} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

la matriz transpuesta es

$$A^T_{4\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \\ a_{14} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.5

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

la matriz transpuesta de A es

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

4. Operaciones con matrices

Prerrequisitos

- Conjuntos de números.
- Números complejos.
- Matrices.

Objetivos específicos

- Realizar las operaciones de suma, resta y multiplicación de matrices.

Suma. Para efectuar la suma de dos matrices es requisito que ambas sean del mismo tamaño (orden), la suma se realiza sumando los elementos correspondientes de cada matriz, es decir, dadas las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ ambas del mismo orden $m \times n$, entonces

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

La matriz $A + B$ es por lo tanto una matriz de orden $m \times n$.

Ejemplo 4.1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$.

Entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.2

Sumar las matrices A y B, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \\ 6 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Respuesta:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 3+3 & 1+5 \\ 5+2 & 6+1 & 2+8 \\ 2+6 & 7+2 & 3+4 \\ 4+5 & 1+1 & 8+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 10 \\ 8 & 9 & 7 \\ 9 & 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.3

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

La suma $A + B$ no se puede hacer debido a que A y B son matrices de diferente tamaño.

Resta. Al igual que la operación suma, el requisito para que se puedan restar dos matrices es que ambas sean del mismo tamaño (orden), la operación se realiza restando al elemento de la primera matriz el elemento correspondiente de la segunda matriz, es decir, dadas las matrices $A_{m\times n} = (a_{ij})$ y $B_{m\times n} = (b_{ij})$, la resta de A menos B es una matriz del mismo orden $m \times n$ dada por

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij}).$$

Ejemplo 4.4

Dadas las matrices $A_{4\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$, y $B_{4\times 2} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}$,

entonces

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} \\ a_{41} - b_{41} & a_{42} - b_{42} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.5

Dadas las matrices

$$A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 6 & 9 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \text{ y } B_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A - B = \begin{pmatrix} 3-2 & 4-1 & 5-2 & 7-4 \\ 8-5 & 3-2 & 6-3 & 9-8 \\ 5-2 & 6-2 & 4-0 & 3-1 \\ 8-4 & 7-6 & 5-3 & 9-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Multiplicación por un escalar. La multiplicación de una matriz por un escalar consiste en multiplicar cada elemento de la matriz por el escalar, es decir, sea la matriz $A_{m\times n}$ y el escalar λ, entonces:

$$\lambda A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.6

Efectuar la multiplicación del escalar $\lambda = 5$ por $A_{4\times4} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Respuesta:

$$5A_{4\times4} = 5\begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 25 & 20 & 5 \\ 0 & 35 & 10 & -20 \\ 5 & 15 & 25 & 35 \\ 10 & 20 & 30 & 5 \end{pmatrix}.$$

Multiplicación de dos matrices

Para que se puedan multiplicar dos matrices es requisito que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de renglones (filas) de la segunda matriz, es decir, si tenemos una matriz A de tamaño $m \times p$, entonces para efectuar el producto AB, la matriz B tiene que ser de tamaño $p \times n$, el producto $C = AB$ es una matriz de orden $m \times n$.

Los elementos c_{ij} de la matriz $C = AB$ se obtienen mediante la siguiente fórmula

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}.$$

Se dice que la multiplicación de matrices se hace multiplicando renglón por columna, ya que en la fórmula podemos observar que el elemento c_{ij} de la matriz producto se obtiene de la suma de los productos de los elementos del renglón i de la matriz A con los correspondientes elementos de la columna j de la matriz B, veamos los ejemplos.

Ejemplo 4.7

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ calcular AB.

Solución:

Ya que la matriz A es de orden 3×2 y la matriz B es de orden 2×4, entonces el producto $C = AB$ es una matriz de orden 3×4,

$$A_{3X2}B_{2X4} = C_{3X4} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix},$$

en donde :

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 4(4) + 1(1) = 17,$

$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 4(1) + 1(-2) = 2,$

$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} = 4(3) + 1(1) = 13,$

$c_{14} = a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} = 4(2) + 1(4) = 12,$

$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 3(4) + 2(1) = 14,$

$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 3(1) + 2(-2) = -1,$

$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} = 3(3) + 2(1) = 11,$

$c_{24} = a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} = 3(2) + 2(4) = 14,$

$c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} = 5(4) + 3(1) = 23,$

$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} = 5(1) + 3(-2) = -1,$

$c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} = 5(3) + 3(1) = 18,$

$c_{34} = a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24} = 5(2) + 3(4) = 22.$

Por lo tanto:

$$AB = C = \begin{pmatrix} 17 & 2 & 13 & 12 \\ 14 & -1 & 11 & 14 \\ 23 & -1 & 18 & 22 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.8

Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.
Encontrar AB y BA.
Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3*1+2*3+1*4 & 3*3+2*5+1*2 \\ 4*1+6*3+2*4 & 4*3+6*5+2*2 \end{pmatrix} =$$

$$AB = \begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 30 & 46 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix}3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix}4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1*3+3*4 & 1*2+3*6 & 1*1+3*2 \\ 3*3+5*4 & 3*2+5*6 & 3*1+5*2 \\ 4*3+2*4 & 4*2+2*6 & 4*1+2*2 \end{pmatrix} =$$

$$BA = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 7 \\ 29 & 36 & 13 \\ 20 & 20 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.9

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ -4 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & -8 & 9 \\ 1 & 11 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Encontrar AB.

Solución: La multiplicación AB no es posible porque el número de columnas de A es diferentes del número de renglones de B.

Ejemplo 4.10

Sean $A = \begin{pmatrix} 1+i & 3-2i & -1-i \\ 2-i & -2+i & 1+i \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1-i & 3+2i \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix}$.

Encontrar AB, BA, $A+B$ y $A-B$.

Solución:

AB no se puede calcular.

$$BA = \begin{pmatrix} 10+i & -7-6i & -1+5i \\ 4-i & 5+3i & 2-2i \end{pmatrix}.$$

$A+B$ no se puede calcular.
$A-B$ no se puede calcular.

5. Determinantes

Prerrequisitos

- Matrices.

Objetivos específicos

- Calcular el determinante de una matriz utilizando diferentes métodos.

El **determinante** es un número asociado a una matriz cuadrada, en otras palabras podemos decir que un determinante es una función de una matriz cuadrada.

Un **determinante de orden 2** se calcula a partir de una matriz cuadrada de orden 2×2, si tenemos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

el determinante de A, denotado como $det(A)$ o $|A|$, se calcula por:

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Se puede observar que:

- El determinante es la suma algebraica de dos productos.
- Cada producto tiene dos factores, en cada uno de ellos hay elementos de todos los renglones y de todas las columnas, pero un sólo elemento de cada renglón, y uno sólo de cada columna.

Ejemplo 5.1

Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 * 5 - 2 * 6 = 8$$

Si tenemos una matriz de orden 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

el **determinante de orden 3** de A está dado por:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Observamos que:

- El determinante es la suma algebraica de seis productos.
- Cada producto tiene 3 factores con elementos de todos los renglones y de todas las columnas, pero sólo un factor de cada renglón y sólo un factor de cada columna.

La **regla de Sarrus** es un método sencillo para calcular determinantes de orden 3. Esta regla nos dice que podemos adicionar las 2 primeras columnas y calcular los productos de las diagonales, los productos en sentido de la diagonal principal conservan su signo, mientras que los productos de las diagonales secundarias cambian de signo. La siguiente figura muestra el procedimiento.

$$\begin{array}{ccc:cc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}$$

La regla de Sarrus también se puede aplicar adicionando los dos primeros renglones.

Ejemplo 5.2

Utilizar la regla de Sarrus para calcular $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Procedimiento:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ -6 & 4 \end{matrix} = 2 {*} {-2} {*} 3 + {-1} {*} 0 {*} {-6} + 3 {*} 1 {*} 4 - {-6} {*} {-2} {*} 3 - 4 {*} 0 {*} 2 - 3 {*} 1 {*} {-1}$$

$$= -12 + 0 + 12 - 36 - 0 + 3 = -33.$$

La regla de Sarrus sólo se puede usar para calcular determinantes de orden 3. En cambio el método llamado **desarrollo por cofactores y menores** permite calcular determinantes de cualquier orden.

Consideremos una matriz A de orden $n \times n$. El menor M_{ij} de A es el determinante que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j. El cofactor correspondiente es

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Ejemplo 5.3

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, algunos menores de A son:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \text{y} \quad M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Los cofactores correspondientes son:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12},$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33}.$$

El cálculo de un determinante de orden n por medio de la descomposición en factores y menores se puede realizar a partir de cualquier fila o de cualquier columna por medio de las siguientes fórmulas.

Si se desarrolla a partir de la fila i

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

Si se desarrolla a partir de la columna j

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

Ejemplo 5.4

Desarrollo por cofactores y menores del determinante de orden 3 a partir de la primera fila.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Ejemplo 5.5

Calcular por desarrollo de cofactores y menores $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$.

Solución:

Desarrollando a partir del primer renglón,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} &= 3\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3(-28 - 15) - (14 - 5) + 4(6 + 4) \\ &= -129 - 9 + 40 \\ &= -98. \end{aligned}$$

Respuesta: -98.

Ejemplo 5.6

Calcular por desarrollo de cofactores y menores $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ 5 & 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

Solución:

Desarrollando a partir de la primera columna,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ 5 & 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$(1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+ (3)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+ (5)(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -18 - 82 + 3(104) - 5(58)$$
$$= -78.$$

Respuesta: -78.

Ejemplo 5.7

Calcular por desarrollo de cofactores y menores $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & -2 \\ 5 & -5 & 7 & -7 \end{vmatrix}$.

Solución:

Es conveniente desarrollar el determinante a partir del rengón 2 ya que contiene dos elementos igual a cero.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & -2 \\ 5 & -5 & 7 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 7 & -7 \end{vmatrix}$$

$$+ (1)(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & -5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -1 * 67 - 19$$
$$= -86.$$

Respuesta: -86.

6. Propiedades de los determinantes

Prerrequisitos

- Matrices y determinantes.

Objetivos específicos

- Describir las propiedades de los determinantes utilizándolas para simplificar el cálculo de determinantes de grandes órdenes.

Las siguientes propiedades de los determinantes son aplicables a renglones o columnas, por lo que se mencionarán en forma indistinta.

1. Si un renglón o columna esta formado por ceros, el valor del determinante es cero.
2. Si dos renglones o columnas son múltiplos, el valor del determinante es cero. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 9 & -2 \\ 4 & 6 & -8 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Si se intercambian dos renglones o columnas, el determinante cambia de signo. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad = B.$$

$$det(A) = -70,$$
$$det(B) = 70.$$

4. Si se multiplica un renglón o una columna por un número λ , equivale a multiplicar el valor del determinante original por λ.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \mid \tfrac{1}{5} \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \quad = B.$$

$$det(A) = -40,$$
$$det(B) = -8.$$

5. El valor de un determinante no se modifica si se intercambian renglones por columnas, es decir, $det(A) = det(A^T)$.

6. El valor de un determinante no se modifica, si a los elementos de un renglón o una columna se les suman los elementos correspondientes a otro renglón o columna multiplicados por un número λ. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \urcorner^{-4} \\ \hookleftarrow_{+} \end{array} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7.$$

Otra forma de calcular determinantes de grandes órdenes es mediante la **regla de Chio**. Esta regla consiste en aplicar las propiedades de los determinantes para transformar el determinante de orden n, de tal modo que $n-1$ de los elementos de un renglón o columna sean todos iguales a cero. Así al desarrollar por cofactores y menores, en vez de calcular n determinantes de orden $n-1$, se calcula sólo uno. Este procedimiento se puede repetir hasta llegar a un determinante de orden 2 que es fácil de calcular.

Además por este procedimiento se puede ver que el determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo 6.1

Utilizar la regla de Chio para calcular $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \\ -5 & 6 & -2 \end{vmatrix}$.

Solución:

Cuando la matriz contiene algún elemento igual a 1 este se puede utilizar para transformar a los elementos de su renglón o columna en ceros, utilizando las propiedades de los determinantes.
En el ejemplo se utilizará el elemento $a_{12} = -1$ para transformar los elementos de su columna en ceros.

- Multiplicando el renglón 1 por 2 y sumando el resultado al renglón 2.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \\ -5 & 6 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} {}^{2} \\ \leftarrow {}_{+} \\ \end{array} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 10 & 0 & 7 \\ -5 & 6 & -2 \end{vmatrix}.$$

- Multiplicando el renglón 1 por 6 y sumando el resultado al renglón 3.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 10 & 0 & 7 \\ -5 & 6 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} {}^{6} \\ \\ \leftarrow {}_{+} \end{array} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 10 & 0 & 7 \\ 13 & 0 & 28 \end{vmatrix}.$$

- Desarrollando a partir de la columna 2.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 10 & 0 & 7 \\ 13 & 0 & 28 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 10 & 7 \\ 13 & 28 \end{vmatrix} = 280 - 91 = 189.$$

Respuesta: 189.

Ejemplo 6.2

Utiliza la regla de Chio para calcular $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ -3 & -3 & -5 & 5 \\ 2 & -4 & 5 & -3 \\ 6 & 5 & 20 & -6 \end{vmatrix}$.

Solución:

- Multiplicando la columna 1 por -5 y sumando el resultado a la columna 3.
- Multiplicando la columna 1 por 2 y sumando el resultado a la columna 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ -3 & -3 & -5 & 5 \\ 2 & -4 & 5 & -3 \\ 6 & 5 & 20 & -6 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 10 & -1 \\ 2 & -4 & -5 & 1 \\ 6 & 5 & -10 & 6 \end{vmatrix}.$$

- Desarrollando a partir del primer renglón.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 10 & -1 \\ 2 & -4 & -5 & 1 \\ 6 & 5 & -10 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} -3 & 10 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ 5 & -10 & 6 \end{vmatrix}.$$

- Sumando el renglón 1 al renglón 2.
- Multiplicando el renglón 1 por 6 y sumando el resultado al renglón 3.

$$\begin{vmatrix} -3 & 10 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ 5 & -10 & 6 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 10 & -1 \\ -7 & 5 & 0 \\ -13 & 50 & 0 \end{vmatrix}.$$

- Desarrollando a partir de la tercera columna.

$$\begin{vmatrix} -3 & 10 & -1 \\ -7 & 5 & 0 \\ -13 & 50 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+3)}(-1)\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -13 & 50 \end{vmatrix} = 285.$$

Respuesta: 285.

Ejemplo 6.3

Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución:

Ya que A es matriz triangular superior, el determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$det(A) = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120.$$

Respuesta: 120.

7. Matriz inversa

Prerrequisitos

- Matrices.
- Multiplicación de matrices.
- Determinantes.

Objetivos específicos

- Definir matriz inversa describiendo sus propiedades.
- Calcular la inversa de una matriz utilizando determinantes.

- Calcular la inversa de una matriz utilizando el método de Gauss-Jordan.

7.1. Matriz inversa y determinantes

Una matriz cuadrada es **singular** si su determinante es igual a cero, o **no singular** en caso contrario.

Para cada matriz no singular A existe una matriz llamada la matriz inversa de A, denotada como A^{-1}, que cumple con la propiedad:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Una matriz singular no tiene matriz inversa.

La inversa de una matriz A se puede obtener empleando determinantes mediante la siguiente ecuación

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} A^*,$$

en donde A^* es la matriz llamada adjunta de A, que se obtiene de la matriz transpuesta A^T, al sustituir los elementos de A^T por sus correspondientes cofactores.

Ejemplo 7.1

Obtener la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ y comprobar su resultado.

Solución:

Primero obtenemos la matriz transpuesta de A,

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo los elementos de la matriz transpuesta por sus respectivos cofactores, obtenemos la matriz adjunta.

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43 & 5 & 21 \\ -9 & 17 & -7 \\ 10 & -8 & -14 \end{pmatrix}.$$

Ahora se calcula el determinante de A,

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -98.$$

Sustituyendo en $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} A^*$, tenemos,

$$A^{-1} = \frac{1}{-98} \begin{pmatrix} -43 & 5 & 21 \\ -9 & 17 & -7 \\ 10 & -8 & -14 \end{pmatrix}.$$

Para comprobar el resultado, multiplicamos la matriz A por su matriz inversa y obtendremos la matriz identidad, es decir, $AA^{-1} = I = A^{-1}A$.

Sustituyendo:

$$\tfrac{1}{-98} \begin{pmatrix} -43 & 5 & 21 \\ -9 & 17 & -7 \\ 10 & -8 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{-98} \begin{pmatrix} -98 & 0 & 0 \\ 0 & -98 & 0 \\ 0 & 0 & -98 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.2. Matriz inversa con el método de Gauss-Jordan

Otra forma de obtener la matriz inversa de la matriz A es con el método de Gauss-Jordan que consiste en aplicar simultáneamente a la matriz A y a la matriz identidad, transformaciones elementales por renglón que pueden ser de tres tipos:

1. Intercambio de renglones.

2. Multiplicación de un renglón por un número $k \neq 0$.

3. Multiplicación de un renglón por un número $k \neq 0$ y sumar el resultado a otro renglón de la matriz.

El procedimiento consiste en colocar un arreglo que contenga a la matriz A en el lado izquierdo y a la matriz I en el lado derecho. Las transformaciones elementales se utilizan para transformar la matriz A en matriz identidad. La matriz que se obtiene en el lado derecho es la matriz inversa A^{-1}, en forma esquemática:

$$(A \mid I) \xrightarrow{\text{transformaciones elementales}} (I \mid A^{-1}).$$

Ejemplo 7.2

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, obtener la matriz inversa A^{-1}.

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

- Intercambiando el renglón 2 con el renglón 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Multiplicando el renglón 1 por -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \vert -1 \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Multiplicando el renglón 1 por -4 y sumando el resultado al renglón 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \vert -4 \\ \longleftarrow + \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Multiplicando el renglón 1 por -3 y sumando el resultado al renglón 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \vert -3 \\ \\ \longleftarrow + \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

- Dividiendo el renglón 2 entre 7 (o multiplicando por $\frac{1}{7}$).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \mid \frac{1}{7} \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

- Multiplicando el renglón 2 por 2 y sumando el resultado al renglón 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \leftarrow\!\urcorner^{+} \\ \mid 2 \,\lrcorner \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

- Multiplicando el renglón 2 por -7 y sumando el resultado al renglón 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \mid -7 \,\urcorner \\ \leftarrow\!\lrcorner_{+} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

- Multiplicando el renglón 3 por $-\frac{1}{2}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \mid -\frac{1}{2} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

- Multiplicando el renglón 3 por $-\frac{5}{7}$ y sumando el resultado al renglón 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{7} & | & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & | & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \\ | -\frac{5}{7} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & | & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Multiplicando el renglón 3 por $-\frac{6}{7}$ y sumando el resultado al renglón 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & | & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow + \\ | -\frac{6}{7} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{14} & -\dfrac{3}{14} & \dfrac{5}{14} \\ -\dfrac{2}{7} & \dfrac{1}{7} & \dfrac{3}{7} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

8. Sistemas de ecuaciones lineales

Prerrequisitos

- Matrices.

- Determinantes.

Objetivos específicos

- Identificar los diferentes tipos de sistemas de ecuaciones lineales.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando la regla de Cramer.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss-Jordan.
- Determinar si un sistema de ecuaciones es compatible.
- Determinar si un sistema de ecuaciones lineales compatible tiene solución única o un número infinito de soluciones.

Una ecuación lineal con n incógnitas o variables es una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b.$$

En donde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ y b son números a los que llamamos coeficientes y término independiente, respectivamente.

Se llama sistema de ecuaciones lineales (SEL) a un grupo de m ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3+ & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3+ & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3+ & \cdots & +a_{3n}x_n & = & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +a_{m3}x_3+ & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

El sistema se puede representar como

$$A\bar{X} = \bar{B},$$

donde

A es la matriz de coeficientes.

$\bar{X}$ es la matriz o vector de variables.

$\bar{B}$ es la matriz o vector de términos independientes.

Es decir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

La solución de un SEL es un conjunto de valores que satisface simultáneamente a todas las ecuaciones.

Se dice que un SEL es **no homogéneo** si al menos uno de sus términos independientes es distinto de cero. De acuerdo al tipo de solución los SEL no homogéneos se clasifican como:

1. **Compatibles**. Son sistemas que tienen solución, y pueden ser:
   a) **Determinados**. Son los que presentan solución única.
   b) **Indeterminados**. Presentan un número infinito de soluciones.
2. **Incompatibles**. Son los SEL que no tienen solución.

Los SEL **homogéneos** son aquellos en los que todos los términos independientes son iguales a cero. Los sistemas homogéneos son todos compatibles, es decir todos tienen solución. Si son determinados tienen la solución única y trivial $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$; mientras que si son indeterminados tienen un número infinito de soluciones.

A continuación se explican la regla de Cramer y el método de Gauss-Jordan que son los dos métodos comúnmente empleados para resolver los SEL.

Dado un SEL con n incógnitas $A\bar{X} = \bar{B}$, la **regla de Cramer** consiste en obtener la solución mediante

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

donde $\Delta = det(A)$ y $\Delta_j = det(A_j)$. Donde a su vez, A_j es la matriz obtenida al sustituir la columna j de A por la columna de términos independientes $\bar{B}$. Es importante destacar que

1. Si $\Delta = 0$ pero alguno de los Δ_j no es cero, entonces el sistema no tiene solución, es decir es un sistema incompatible.

2. Si $\Delta = 0$ y $\Delta_j = 0$ para todo j, $1 \leq j \leq n$, entonces el sistema tiene un número infinito de soluciones, es decir es un sistema indeterminado.

Ejemplo 8.1

Resolver utilizando la regla de Cramer:

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3$$

$$x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3$$

$$2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 5.$$

Procedimiento:

El sistema anterior puede ser expresado como:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

Primero calculamos el determinante de la matriz de coeficientes.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 3 * -4 * -3 + 1 * 5 * -4 + 2 * 2 * 2$$

$$- 2 * -4 * -4 - 3 * 5 * 2 - 1 * 2 * -3$$

$$= -32.$$

Reemplazando la columna uno de la matriz de coeficientes por la matriz de resultados se obtiene,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & 2 \\ 5 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -96.$$

Reemplazando la columna dos de la matriz de coeficientes por la matriz de resultados se obtiene,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -32.$$

Reemplazando la columna tres de la matriz de coeficientes por la matriz de resultados se obtiene,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -64.$$

La solución del sistema es:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-96}{-32} = 3,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-32}{-32} = 1,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-64}{-32} = 2.$$

Ejemplo 8.2

Determinar la compatibilidad del SEL

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Solución:

Se determina el determinante de la matriz de coeficientes

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ya que $\Delta = 0$, el sistema es incompatible o puede tener un número infinito de soluciones. El sistema es incompatible si al menos un $\Delta_i \neq 0$.

Reemplazando la columna uno de la matriz de coeficientes por la matriz de resultados se obtiene,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 20.$$

Por lo tanto el sistema es incompatible.

Ejemplo 8.3

Determinar la compatibilidad del SEL

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Solución:

Se determina el determinante de la matriz de coeficientes

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Ya que $\Delta = 0$, el sistema es incompatible o puede tener un número infinito de soluciones. Si al menos un Δ_i es distinto de cero, el sistema no tiene solución, es decir es incompatible.
Reemplazando la columna uno de la matriz de coeficientes por la matriz de resultados se obtiene,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Reemplazando la columna dos de la matriz de coeficientes por la matriz de resultados se obtiene,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Reemplazando la columna tres de la matriz de coeficientes por la matriz de resultados se obtiene,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Por lo tanto el sistema es compatible con un número infinito de soluciones.

Los SEL también se pueden resolver por el **método de Gauss-Jordan** que ya hemos utilizado para obtener la matriz inversa. Para resolver un SEL se realizan transformaciones elementales por renglón en la matriz ampliada del sistema, la cual consiste en la matriz de coeficientes más la columna de términos independientes. La matriz de coeficientes se transforma en la matriz identidad, y la columna de términos independientes en la solución del SEL.

Ejemplo 8.4

Resolver utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} -4x_1 + 3x_3 - x_4 &= -5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= -4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_4 &= -18 \end{aligned}$$

Solución:
Primero escribimos la matriz ampliada del sistema

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & -1 & | & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 4 & | & -4 \\ -2 & -4 & 0 & 5 & | & -18 \end{pmatrix}$$

Realizamos las operaciones elementales por renglón para transformar la matriz de coeficientes en matriz identidad.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 3 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 0 & 5 & -18 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 0 & 5 & -18 \end{array}\right),$$

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 0 & 5 & -18 \end{array}\right) & \begin{array}{l} 4 \quad 2 \\ + \\ \\ + \end{array} \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -18 \end{array}\right),$$

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -18 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \mid \frac{1}{8} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & -5 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -18 \end{array}\right),$$

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & -5 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -18 \end{array}\right) & \begin{array}{l} + \\ -2 \quad 5 \\ + \\ \\ \end{array} \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & \frac{7}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & \frac{51}{8} & \frac{27}{8} & -\frac{57}{8} \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -18 \end{array}\right),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & | & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & \frac{7}{8} & -\frac{1}{8} & | & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & \frac{51}{8} & \frac{27}{8} & | & -\frac{57}{8} \\ 0 & 0 & 2 & 5 & | & -18 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid \frac{8}{51} \\ \\ \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & | & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & \frac{7}{8} & -\frac{1}{8} & | & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{27}{51} & | & -\frac{57}{51} \\ 0 & 0 & 2 & 5 & | & -18 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & | & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & \frac{7}{8} & -\frac{1}{8} & | & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{27}{51} & | & -\frac{57}{51} \\ 0 & 0 & 2 & 5 & | & -18 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ \frac{3}{4} \quad -\frac{7}{8} \quad -2 \\ + \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{33}{51} & | & \frac{21}{51} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{30}{51} & | & \frac{18}{51} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{27}{51} & | & \frac{-57}{51} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{201}{51} & | & -\frac{804}{51} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{33}{51} & | & \frac{21}{51} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{30}{51} & | & \frac{18}{51} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{27}{51} & | & \frac{-57}{51} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{201}{51} & | & -\frac{804}{51} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mid \frac{51}{201} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{33}{51} & | & \frac{21}{51} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{30}{51} & | & \frac{18}{51} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{27}{51} & | & \frac{-57}{51} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{33}{51} & | & \frac{21}{51} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{30}{51} & | & \frac{18}{51} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{27}{51} & | & \frac{-57}{51} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ -\frac{33}{51} \quad \frac{30}{51} \quad -\frac{27}{51} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -4 \end{pmatrix}.$$

La solución del sistema es:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 3,\\
x_2 &= -2,\\
x_3 &= 1,\\
x_4 &= -4.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 8.5

Resolver el sistema por el método de Gauss-Jordan

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -1\\
3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 2\\
4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 5
\end{aligned}
$$

Solución:

Realizamos las operaciones elementales por renglón para transformar la matriz de coeficientes en matriz identidad.

$$
\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & | & -1\\ 3 & 4 & 5 & | & 2\\ 4 & 5 & 6 & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & | & -3\\ 3 & 4 & 5 & | & 2\\ 4 & 5 & 6 & | & 5 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & | & -3\\ 3 & 4 & 5 & | & 2\\ 4 & 5 & 6 & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & | & -3\\ 0 & 1 & 2 & | & -7\\ 0 & 1 & 2 & | & -7 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & | & -3\\ 0 & 1 & 2 & | & -7\\ 0 & 1 & 2 & | & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -0 & 1 & | & -10\\ 0 & 1 & 2 & | & -7\\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.
$$

Observamos que en la última matriz, hay una fila en la que todos los elementos son iguales a cero, esto significa que el sistema es compatible pero tiene un número infinito de soluciones. Las ecuaciones que se obtienen de esta representación son:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 &= -10 \\ x_2 + 2x_3 &= -7 \end{aligned}$$

La solución del SEL es:

$$\begin{aligned} x_1 &= 10 + x_3 \\ x_2 &= -7 - 2x_3 \end{aligned}$$

Donde x_3 puede tomar cualquier valor arbitrario.