NOTAS DE POLINOMIOS

Alma Virginia Lara Sagahón, Vladislav Khartchenko, Antonio Trejo Lugo,
Angélica Espinosa Godínez, José Luis Garza Rivera

Índice

1. Introducción

En algunas escuelas de México, la fórmula general para la solución y factorización de los polinomios cuadráticos,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

se conoce como “fórmula del chicharronero”porque se supone que hasta los que venden chicharrones fuera de la escuela la conocen. En cambio, la fórmula de Cardano-Tartaglia,

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{-q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{-q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}},$$

para la solución de la ecuación de tercer grado $x^3+px+q=0$, no goza de tanta fama. Esta fórmula fue utilizada por Niccoló Fontana (más conocido con el sobrenombre de Tartaglia), como una herramienta secreta para ganar competencias entre un grupo de polémicos científicos del siglo XVI. Tartaglia no quería revelar su fórmula, pero cedió ante Jerónimo Cardano que le insistió para que se la mostrara prometiendo que nunca la publicaría. No obstante, en 1545 rompiendo su promesa Cardano publicó la fórmula en su libro Ars Magna, con la justificación de saber que esta fórmula ya antes la había descrito Scipione del Ferro. Cardano en su libro reconoce a del Ferro como autor de la fórmula pero menciona que Tartaglia también la había descubierto. Desde luego hubo un conflicto entre Cardano y Tartaglia. En la actualidad se reconoce la autoría de Tartaglia ya que no se han encontrado documentos que prueben la de del Ferro.

En esa misma poca fue encontrada la fórmula para la solución de la ecuación de cuarto grado por un discípulo de Cardano llamado Ludovico Ferrari, quien en su exposición puso de manifiesto lo que hoy se conoce como números complejos. Pero con la ecuación de quinto grado se tiene una situación muy diferente ya que no es posible resolverla con una fórmula general en términos de radicales. Esto ya está demostrado en el teorema conocido como de Abel-Rufini. Los nombres del teorema se deben a Paolo Ruffini, quien hizo una demostración incompleta en 1799, y al noruego Niels Henrik Abel que proporcionó la prueba en 1823.

El teorema de Abel-Rufini no afirma que las ecuaciones polinómicas de grado cinco o superior no tengan soluciones o que no puedan ser resueltas. De hecho, según el Teorema Fundamental del Álgebra, cualquier ecuación polinomial tiene soluciones complejas; estas soluciones no siempre pueden ser calculadas exactamente con un número finito de operaciones aritméticas, pero sí hasta cualquier grado de exactitud deseado, usando métodos numéricos tales como el método de Newton-Raphson.

Las ecuaciones de grados superiores o iguales a cinco no pueden resolverse en general por radicales, pero hay ecuaciones particulares en las que sí se puede. El criterio preciso que separa aquellas ecuaciones que pueden ser resueltas mediante radicales de aquellas que no, fue dado por Évariste Galois y es parte de la Teoría de Galois. La Teoría de Galois es difícil para el aprendizaje al igual que la teoría de la relatividad de Einstein. No obstante, en este curso se dan los primeros pequeños pasos en la Teoría de Galois al considerar el Teorema Fundamental del Álgebra y los métodos especiales de solución de las ecuaciones con coeficientes enteros.

Objetivo general

- Establecer las características de los polinomios y conocer los métodos para obtener sus raíces.

2. Nociones básicas

Prerrequisitos

- Teoría de conjuntos; conjuntos de números; relaciones y funciones.

Objetivos específicos

- Describir polinomios.
- Determinar el grado de polinomios dados.
- Determinar la igualdad de polinomios.

Una expresión

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

se conoce como polinomio. Por ejemplo,

$$-2 + 5x + x^2 + 3x^4 - 8x^5$$

es el polinomio con coeficientes

$$a_0 = -2,\ a_1 = 5,\ a_2 = 1,\ a_3 = 0,\ a_4 = 3,\ a_5 = -8.$$

Dos polinomios son **iguales** si tienen los mismos términos, con excepción de aquellos que tengan coeficiente cero. La igualdad se establece independientemente del orden de aparición de los términos:

$$5 + 2x + 4x^2 - 6x^3 = -6x^3 + 2x + 4x^2 - 0x^4 + 5.$$

El **grado del polinomio** se define como el máximo exponente de la variable independiente con coeficiente no cero:

$$\begin{array}{ccc} 6 + 5x - 3x^3 + 18x^4 & \text{grado} & 4 \\ 4 - 2x + 3x^4 + 0x^5 - 2x^3 & \text{grado} & 4 \\ 2 - 5x & \text{grado} & 1 \\ 8 & \text{grado} & 0 \\ 0 & \text{grado} & -\infty. \end{array}$$

El polinomio cero es un polinomio cuyos coeficientes son todos ceros,

$$0 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \ldots + 0x^n,$$

y su grado por definición es $-\infty$. El grado del polinomio $f(x)$ se denota por $\deg f(x)$ por la palabra en inglés “degree” que significa grado.

La expresión compacta de un polinomio tiene la forma

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

En esta expresión, el parámetro i no tiene un valor fijo, sino que toma valores desde $i = 0$ hasta $i = n$. Si $i = 0$, se define el término $a_0 x^0$; si $i = 1$, se define el término $a_1 x^1$; si $i = 2$, se define el término $a_2 x^2$; si $i = 3$, se define el término $a_3 x^3$; ... . El símbolo de sumatoria, $\sum$, en la expresión compacta, significa que tenemos que sumar todos estos términos:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

donde, por supuesto, $x^0 = 1$ y $x^1 = x$, es decir $a_0 x^0 = a_0$, y $a_1 x^1 = a_1 x$. Tal que el parámetro i no tiene un valor fijo, no es importante su s mbolo, lo importante es sólo el rango de sus valores:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{\Lambda=0}^{n} a_\Lambda x^\Lambda.$$

3. Operaciones con polinomios

Prerrequisitos

- Conjuntos de números; relaciones y funciones; leyes de exponentes.

Objetivos específicos

- Identificar términos semejantes de polinomios.
- Sumar, restar, multiplicar y dividir polinomios.

La **adición de polinomios** se realiza sumando los coeficientes de los **términos semejantes**; se llaman términos semejantes aquellos en los que la variable independiente tiene el mismo exponente.

Ejemplo 3.1

Ejemplo de suma de polinomios.

$$(6+2x+5x^3+2x^4+5x^5)+(3+2x-6x^2-3x^4+4x^5) = 9+4x-6x^2+5x^3-x^4+9x^5.$$

La definición de la suma de los polinomios se puede escribir usando la expresión compacta:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i.$$

En la misma manera se define la **sustracción de polinomios**,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i) x^i,$$

Ejemplo 3.2

Ejemplo de resta de polinomios.

$$(6+2x+5x^3+2x^4+5x^5)-(3+2x-6x^2-3x^4+4x^6) = 3+6x^2+5x^3+5x^4+5x^5-4x^6.$$

La **multiplicación de polinomios** se realiza aplicando la ley distributiva y la regla de los exponentes de un producto,

$$ax^i \cdot bx^k = abx^{i+k}.$$

En otras palabras, el producto de dos polinomios es igual a la suma de todos los posibles productos de los términos del primer polinomio por los términos del segundo polinomio.

La multiplicación se puede realizar "por columnas", es decir multiplicando cada término del primer polinomio por el primer término del segundo polinomio, luego por el segundo término, luego por el tercer término y así, sucesivamente hasta el último término del segundo polinomio. Los productos se arreglan en columnas de tal manera que cada columna contenga sólo términos semejantes y la suma sea más práctica.

Ejemplo 3.3

Encontrar el producto de los polinomios $g(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ y $q(x) = -3x^2 + 5x + 4$.
Solución:

$$\begin{array}{cccccc}
5x^3 & -2x^2 & +3x & -1 & & \\
-3x^2 & +5x & +4 & & & \\
\hline
 & & & & & \\
-15x^5 & +6x^4 & -9x^3 & +3x^2 & & \\
 & +25x^4 & -10x^3 & +15x^2 & -5x & \\
 & & +20x^3 & -8x^2 & +12x & -4 \\
\hline
-15x^5 & +31x^4 & +x^3 & +10x^2 & +7x & -4
\end{array}$$

La respuesta es: $g(x) \cdot q(x) = -15x^5 + 31x^4 + x^3 + 10x^2 + 7x - 4$.

La expresión compacta de la definición del producto tiene la siguiente forma:

$$(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i)(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i) = \sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}) x^k.$$

De esta fórmula, es claro que el grado del producto es la suma de los grados de los factores,

$$\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x),$$

tal que el producto tiene sólo un término con exponente $n + m$, esto es $a_n b_m x^{n+m}$. La expresión compacta de la suma implica que el grado de la suma puede ser menor que los grados de los polinomios sumados: el coeficiente del exponente x^n es cero si $a_n = -b_n$.

Ejemplo 3.4

Encontrar el grado del polinomio

$$f(x) = (2x-1)(x^2-x+1) + (x+1)(-2x^2+x+2).$$

Solución: el polinomio $f(x)$ es la suma de dos polinomios de grado 3. Para encontrar la forma explícita de $f(x)$ tenemos que desarrollar los productos y sumar los resultados. Para encontrar el primer polinomio realizamos el procedimiento "por columna":

$$\begin{array}{cccc}
2x & -1 & & \\
x^2 & -x & +1 & \\
\hline
 & & & \\
2x^3 & -x^2 & & \\
 & -2x^2 & +x & \\
 & & +2x & -1 \\
\hline
2x^3 & -3x^2 & +3x & -1.
\end{array}$$

En la misma manera encontramos el segundo polinomio.

$$\begin{array}{cccc}
x & +1 & & \\
-2x^2 & +x & +2 & \\
\hline
 & & & \\
-2x^3 & -2x^2 & & \\
 & +x^2 & +x & \\
 & & +2x & +2 \\
\hline
-2x^3 & -x^2 & +3x & +2.
\end{array}$$

Entonces la suma $f(x) = 0x^3 - 4x^2 + 6x + 1$ tiene grado 2.

La respuesta es: $\deg f(x) = 2$.

Ejemplo 3.5

Encontrar el grado del polinomio

$$p(x) = (x+3)(x^2+3x+2) - (x+1)(x^2+5x+6).$$

Solución: el polinomio $p(x)$ es la resta de dos polinomios de grado 3. Para encontrar la forma explícita realizamos el procedimiento "por columna":

$$\begin{array}{cccc}
x & +3 & & \\
x^2 & +3x & +2 & \\
\hline
 & & & \\
x^3 & +3x^2 & & \\
 & +3x^2 & +9x & \\
 & & +2x & +6 \\
\hline
x^3 & +6x^2 & +11x & +6.
\end{array}$$

En la misma manera encontramos el segundo polinomio.

$$\begin{array}{cccc}
x & +1 & & \\
x^2 & +5x & +6 & \\
\hline
 & & & \\
x^3 & +x^2 & & \\
 & +5x^2 & +5x & \\
 & & +6x & +6 \\
\hline
x^3 & +6x^2 & +11x & +6.
\end{array}$$

Entonces la resta $p(x) = (x^3+6x^2+11x+6) - (x^3+6x^2+11x+6)$ es un polinomio cero y por la definición su grado es $-\infty$.

La respuesta es: $\deg p(x) = -\infty$.

La **división con residuo** entre polinomios se puede realizar por medio del algoritmo de Euclides.

TEOREMA de Euclides. *Sea $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios y $g(x) \neq 0$. Existen dos* *polinomios únicos* $q(x)$ *y* $r(x)$, *tal que*

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \qquad \deg r(x) < \deg g(x).$$

En esta fórmula a $f(x)$ se le llama **dividendo**, a $g(x)$ se le llama **divisor**, $q(x)$ es el **cociente** y $r(x)$ es el **residuo**.

Ejemplo 3.6

Sea $f(x) = 6x^4 - x^3 - 12x^2 + 12x - 2$ y $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Encontrar el cociente y el residuo de la división de $f(x)$ entre $g(x)$.
Solución: primero colocamos el dividendo y el divisor en el siguiente esquema del algoritmo de Euclides:

$$g(x)\ \overline{)\ f(x)}.$$

Para los polinomios del ejemplo se tiene la forma

$$3x^2 - 2x + 1\overline{)\ 6x^4 \ \ - x^3 - 12x^2 + 12x - 2}$$

Dividimos el término con el exponente máximo del dividendo (esto es $6x^4$) entre el término con el exponente máximo del divisor (esto es $3x^2$) y colocamos el resultado (esto es $2x^2$) arriba del dividendo.

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad\quad\quad 2x^2 \\ \hline 3x^2 - 2x + 1 & 6x^4 \ \ - x^3 - 12x^2 + 12x - 2 \end{array}$$

Multiplicamos este resultado por el divisor y colocamos el producto con **signo contrario** abajo del dividendo.

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad\quad\quad 2x^2 \\ \hline 3x^2 - 2x + 1 & 6x^4 \ \ - x^3 - 12x^2 + 12x - 2 \\ & \underline{-6x^4 + 4x^3 \ \ - 2x^2} \end{array}$$

El resultado de esta operación se suma al dividendo.

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad\quad\quad 2x^2 \\ \cline{2-2} 3x^2-2x+1 & \;6x^4 \;\; -x^3-12x^2+12x-2 \\ & -6x^4+4x^3 \;\; -2x^2 \\ \cline{2-2} & \quad\quad\quad 3x^3-14x^2+12x \end{array}$$

Así se ha hecho el primer paso del algoritmo de Euclides y nos da el término con el exponente máximo del cociente (esto es $2x^2$).
Ahora aplicamos el mismo paso considerando como dividendo el resultado de la suma que es $3x^3 - 14x^2 + 12x$: dividimos el término con el exponente máximo (esto es $3x^3$) entre el término con el exponente máximo del divisor ($3x^2$) y colocamos el resultado (esto es x) arriba del dividendo.

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad\quad\quad 2x^2 \quad +x \\ \cline{2-2} 3x^2-2x+1 & \;6x^4 \;\; -x^3-12x^2+12x-2 \\ & -6x^4+4x^3 \;\; -2x^2 \\ \cline{2-2} & \quad\quad\quad 3x^3-14x^2+12x \end{array}$$

Multiplicamos este resultado (que es x) por el divisor y colocamos el producto con signo contrario abajo.

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad\quad\quad 2x^2 \quad +x \\ \cline{2-2} 3x^2-2x+1 & \;6x^4 \;\; -x^3-12x^2+12x-2 \\ & -6x^4+4x^3 \;\; -2x^2 \\ \cline{2-2} & \quad\quad\quad 3x^3-14x^2+12x \\ & \quad\quad -3x^3 \;\; +2x^2 \;\; -x \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Sumando se completa el segundo paso.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
\multicolumn{1}{r}{} & & & 2x^2 & +x & \\ \cline{2-6}
3x^2-2x+1 & 6x^4 & -x^3 & -12x^2 & +12x & -2 \\
 & -6x^4 & +4x^3 & -2x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & 3x^3 & -14x^2 & +12x & \\
 & & -3x^3 & +2x^2 & -x & \\ \cline{3-5}
 & & & -12x^2 & +11x & -2
\end{array}
$$

Realizamos el tercer paso.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
\multicolumn{1}{r}{} & & & 2x^2 & +x & -4 \\ \cline{2-6}
3x^2-2x+1 & 6x^4 & -x^3 & -12x^2 & +12x & -2 \\
 & -6x^4 & +4x^3 & -2x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & 3x^3 & -14x^2 & +12x & \\
 & & -3x^3 & +2x^2 & -x & \\ \cline{3-5}
 & & & -12x^2 & +11x & -2 \\
 & & & 12x^2 & -8x & +4 \\ \cline{4-6}
 & & & & 3x & +2
\end{array}
$$

Para iniciar el cuarto paso, tenemos que dividir $3x$ entre el término con exponente $3x^2$. Tal que no se puede realizar esta división, aquí se termina el algoritmo de Euclides. Arriba del esquema tenemos el cociente, $2x^2 + x - 4$, y abajo del esquema tenemos el residuo, $3x + 2$.

La respuesta es: $q(x) = 2x^2 + x - 4$, $r(x) = 3x + 2$.

Ejemplo 3.7

Sea $f(x) = x^4$ y $g(x) = 2x^2 + x - 1$. Encontrar el cociente y el residuo de la división de $f(x)$ por $g(x)$.
Solución: Para realizar el algoritmo de Euclides, tenemos que poner en el esquema todos los términos incluyendo los que tienen coeficiente cero:

$$
\begin{array}{rl}
 & \quad 0.5x^2 - 0.25x + 0.375 \\
2x^2 + x - 1) & \overline{\ x^4 + \ 0x^3 + \ 0x^2 + \quad 0x + 0} \\
 & -x^4 - 0.5x^3 + 0.5x^2 \\
 & \overline{-0.5x^3 + 0.5x^2 + \quad 0x + 0} \\
 & \quad 0.5x^3 + 0.25x^2 - 0.25x \\
 & \qquad \overline{0.75x^2 - 0.25x + \ 0} \\
 & \qquad -0.75x^2 - 0.375x + 0.375 \\
 & \qquad \overline{\qquad\qquad -0.625x + 0.375.}
\end{array}
$$

La respuesta es: $q(x) = 0.5x^2 - 0.25x + 0.375$, $r(x) = -0.625x + 0.375$.

Ejemplo 3.8

Sea $f(x) = 2x^2 + x - 1$ y $g(x) = x^4$. Encontrar el cociente y el residuo de la división de $f(x)$ entre $g(x)$.
Solución: En este caso no podemos realizar ni siquiera el primer paso del algoritmo de Euclides ya que no se puede dividir el término $2x^2$ entre el término x^4.

$$x^4 \quad \overline{|\ 2x^2 + x - 1}.$$

Esto significa que el corto esquema anterior, ya tiene la respuesta: por arriba tenemos una suma vacía, $q(x) = 0$, y por debajo tenemos el polinomio $2x^2 + x - 1$. La descomposición del Teorema de Euclides toma la forma:

$$2x^2 + x - 1 = x^4 \cdot 0 + (2x^2 + x - 1).$$

La respuesta es: $q(x) = 0$, $r(x) = 2x^2 + x - 1$.

4. División sintética

Prerrequisitos

- Nociones básicas de polinomios, operaciones entre polinomios.

Objetivos específicos

- Realizar el algoritmo de la división sintética (esquema de Horner).
- Demostrar el teorema de Besout (Teorema del residuo).
- Resolver ejercicios de aplicación del teorema de Besout.

El algoritmo de la **división sintética** se usa cuando el divisor es un polinomio de la forma $g(x) = x - a$. En este caso el grado del residuo es menor que $\deg g(x) = 1$. Es decir, el residuo tiene grado 0 ó $-\infty$, y por lo tanto es una constante. Se puede realizar la división sintética por medio del esquema de Horner.

Ejemplo 4.1

Sea $f(x) = 3x^3 + 6x - 4$ y $g(x) = x - 2$. Encontrar el cociente y el residuo de la división de $f(x)$ entre $g(x)$.
Solución: El esquema de Horner tiene dos líneas, una horizontal y una vertical. Arriba colocamos todos los coeficientes del dividiendo (incluyendo valores cero) y después de la línea vertical, el valor de $a = 2$ en la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 6 & \text{-}4 & \\ & & & & 2 \\ \hline & & & & \end{array}$$

Bajamos el primer coeficiente (que corresponde al término con exponente máximo):

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 6 & \text{-}4 & \\ & & & & 2 \\ \hline 3 & & & & \end{array}$$

Multiplicamos el número nuevo colocado debajo de la línea horizontal por el número $a = 2$, que está escrito después de la línea vertical, y colocamos el producto arriba de la línea horizontal:

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 6 & -4 & \\ & 6 & & & 2 \\ \hline 3 & & & & \end{array}$$

Sumamos la segunda columna:

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 6 & -4 & \\ & 6 & & & 2 \\ \hline 3 & 6 & & & \end{array}$$

Multiplicamos el número nuevo colocado abajo de la línea horizontal por el número $a = 2$, que está escrito después de la línea vertical, y colocamos el producto arriba de la línea horizontal:

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 6 & -4 & \\ & 6 & 12 & & 2 \\ \hline 3 & 6 & & & \end{array}$$

Sumamos la tercera columna:

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 6 & -4 & \\ & 6 & 12 & & 2 \\ \hline 3 & 6 & 18 & & \end{array}$$

Multiplicamos el número nuevo colocado abajo de la línea horizontal por el número $a = 2$, que esta escrito después de la línea vertical, y colocamos el producto arriba de la línea horizontal:

$$\begin{array}{cccc|c}
3 & 0 & 6 & -4 & \\
 & 6 & 12 & 36 & 2 \\
\hline
3 & 6 & 18 & &
\end{array}$$

Sumamos la última columna:

$$\begin{array}{cccc|c}
3 & 0 & 6 & -4 & \\
 & 6 & 12 & 36 & 2 \\
\hline
3 & 6 & 18 & 32 &
\end{array}$$

El esquema de Horner ahora está completo. El resultado de la división se coloca debajo de la línea horizontal. El último número es el residuo (sabemos que el residuo es constante), y los otros números son coeficientes del cociente. Es decir, $q(x) = 3x^2 + 6x + 18$, $r(x) = 32$.

La respuesta es: $q(x) = 3x^2 + 6x + 18$, $r(x) = 32$.

Ejemplo 4.2

Sea $f(x) = x^6$ y $g(x) = x + 1$. Encontrar el cociente y el residuo de la división de $f(x)$ entre $g(x)$.
Solución: En este ejemplo, $g(x) = x + 1 = x - (-1)$. Entonces podemos realizar la división sintética con $a = -1$ por medio del esquema de Horner.

$$\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
\hline
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 &
\end{array}$$

La respuesta es: $q(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, $r(x) = 1$.

TEOREMA de Besout (del residuo). *El residuo de la división de $f(x)$ entre $g(x) = x - a$ es igual a $f(a)$.*

Demostración: Por el Teorema de Euclides tenemos la descomposición:

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x), \qquad \deg r(x) < \deg(x - a) = 1.$$

Sustituyendo el valor $x = a$ en esta igualdad,

$$f(a) = (a - a) \cdot q(a) + r(a) = 0 \cdot q(a) + r(a) = r(a).$$

Tal que $\deg r(x) < 1$, el polinomio $r(x)$ es una constante, entonces $r(x) = r(a) = f(a)$.

Por el Teorema de Besout, el esquema de Horner además puede servir para calcular los valores de los polinomios $f(x)$ en un punto dado $x = a$.

5. Raíces

Prerrequisitos

- Teoría de conjuntos; conjuntos de números; desigualdades; funciones; operaciones entre polinomios; división sintética.

Objetivos específicos

- Describir la noción de raíz de un polinomio.
- Factorizar polinomios conociendo sus raíces.
- Resolver desigualdades a partir de la factorización de polinomios.

Un número a es una **raíz** del polinomio $f(x)$ si $f(a) = 0$. Por el Teorema de Besout, si a es una raíz de $f(x)$, entonces el residuo al dividir $f(x)$ entre $x - a$ es $f(a) = 0$, es decir, la factorización del polinomio $f(x)$ es:

$$f(x) = (x - a)q(x).$$

Ejemplo 5.1

Factorizar el polinomio

$$f(x) = 2x^4 - x^3 - 7x^2 + 2x + 6$$

si se sabe que $x = -1$ y $x = 3/2$ son raíces del mismo.

Solución: Según el teorema de Besout, la factorización del polinomio $f(x)$ es

$$f(x) = (x - (-1))q(x) = (x + 1)q(x).$$

Podemos encontrar el cociente $q(x)$ por medio de la división sintética.

$$\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & -7 & 2 & 6 & \\ & -2 & 3 & 4 & -6 & -1 \\ \hline 2 & -3 & -4 & 6 & 0 & \end{array}$$

Tal que el último número en el renglón de abajo es cero, entonces -1 es la raíz de $f(x)$. Los otros números definen el cociente: $q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 6$. Ya que se sabe que $x = 3/2$ es raíz de $f(x)$. Por lo tanto

$$0 = f(3/2) = (3/2 + 1)q(3/2) = 2.5q(3/2).$$

Es decir, $x = 3/2$ también es la raíz de $q(x)$. Según el teorema de Besout, la factorización del polinomio $q(x)$ es

$$q(x) = (x - 3/2)q_1(x).$$

Podemos encontrar el cociente $q_1(x)$ por medio del esquema de Horner.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -3 & -4 & 6 & \\ & 3 & 0 & -6 & 3/2 \\ \hline 2 & 0 & -4 & 0 & \end{array}$$

Entonces $q_1(x) = 2x^2 - 4$, y tenemos la descomposición

$$f(x) = (x+1)(x-3/2)(2x^2-4).$$

El polinomio $q_1(x)$ como polinomio cuadrático tiene su propia factorizacón

$$2x^2 - 4 = 2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}).$$

Finalmente encontramos la factorización completa del polinomio $f(x)$:

$$f(x) = 2(x+1)(x-3/2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}).$$

La respuesta es: $f(x) = 2(x+1)(x-3/2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

Ejemplo 5.2

Resolver la desigualdad

$$x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6 \leq 0,$$

si está dado que $x = 2$ y $x = -1$ son raíces del polinomio del lado izquierdo.

Solución: Podemos tratar de aplicar el método de la serpiente que hemos visto en el capítulo 2. Antes de aplicarlo tenemos que factorizar el polinomio $f(x)$ del lado izquierdo.
Según el teorema de Besout, la factorización del polinomio $f(x)$ es

$$f(x) = (x-2)q(x).$$

Podemos encontrar el cociente $q(x)$ por medio de la división sintética.

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -5 & 3 & 6 & \\ & 2 & 2 & -6 & -6 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -3 & -3 & 0 & \end{array}$$

Ya que el último número en el renglón de abajo es cero, entonces 2 es la raíz de $f(x)$. Los otros números definen el cociente: $q(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$.
En las condiciones del ejemplo se dice que $x = -1$ es una raíz de $f(x)$. Por lo tanto

$$0 = f(-1) = (-1-2)q(-1) = -3q(-1).$$

Es decir, $q(-1) = 0$ y $x = -1$ también es la raíz de $q(x)$. Según teorema de Besout, la factorización del polinomio $q(x)$ es

$$q(x) = (x-(-1))q_1(x) = (x+1)q_1(x).$$

Para encontrar el cociente $q_1(x)$ aplicamos la división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -3 & -3 & \\ & -1 & 0 & 3 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -3 & 0 & \end{array}$$

Entonces $q_1(x) = x^2 - 3$, y obtenemos la descomposición

$$f(x) = (x-2)(x+1)(x^2-3).$$

El polinomio cuadrático $q_1(x)$ tiene su propia factorizacón

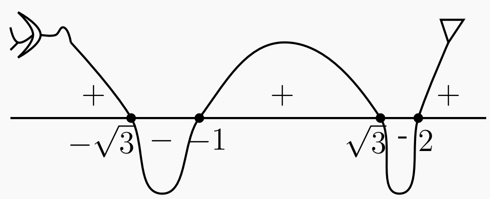
$$x^2 - 3 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}).$$

Finalmente, encontramos la factorización completa del polinomio $f(x)$:

$$f(x) = (x - 2)(x + 1)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}).$$

Ahora podemos aplicar el método de la serpiente

$$(x - 2)(x + 1)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \leq 0.$$



La respuesta es: $[-\sqrt{3}, -1] \cup [\sqrt{3}, 2]$.

6. Raíces racionales

Prerrequisitos

- conjuntos de números; desigualdades; relaciones y funciones; división sintética.

Objetivos específicos

- Encontrar las raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros utilizando el teorema sobre raíces racionales.
- Resolver ejercicios relacionados con las raíces racionales de los polinomios.

TEOREMA sobre raíces racionales. *Sea*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

un polinomio con coeficientes enteros, donde $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$ *y* $n \geq 1$. *Si un número racional es raíz de* $f(x)$ *y* $\frac{p}{q}$ *es su mínima expresión, entonces* p *es un factor de* a_0 *y* q *es un factor de* a_n.

Este teorema junto con el esquema de Horner nos da una herramienta para encontrar todas las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros.

Ejemplo 6.1

Encontrar el dominio de la función

$$\sqrt{2x^4 - 3x^3 - 14x^2 + 2x + 4}.$$

Solución: El dominio de la función raíz cuadrática es el conjunto de todos los números no negativos. Es decir, un número x pertenece al dominio de la función dada si y solo si

$$2x^4 - 3x^3 - 14x^2 + 2x + 4 \geq 0.$$

Por lo tanto, nuestra tarea es resolver esta desigualdad.
Podemos aplicar el método de la serpiente. Antes de hacerlo, tenemos que factorizar el polinomio $f(x)$ del lado izquierdo por medio del teorema de Besout.

Para usar el teorema de Besout, necesitamos encontrar las raíces de $f(x)$. Por lo tanto, buscaremos las raíces racionales de este polinomio.
Tenemos, $a_0 = 4$, $a_4 = 2$.
Los factores de a_0 son $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.
Los factores de a_4 son $\pm 1, \pm 2$.
Por lo que, si $f(x)$ tiene raíces racionales éstas deberán ser alguno de los siguientes números:

$$a = \frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}\}.$$

Es decir, tenemos una lista de ocho números sospechosos. Podemos verificarlos uno por uno usando el esquema de Horner.

$$\begin{array}{rrrrr|r}
2 & -3 & -14 & 2 & 4 & \\
 & 2 & -1 & -15 & -13 & 1 \\
\hline
2 & -1 & -15 & -13 & -9 &
\end{array}$$

Según el Teorema de Besout, $f(1) = -9 \neq 0$. Por lo tanto $x = 1$ no es una raíz.

$$\begin{array}{rrrrr|r}
2 & -3 & -14 & 2 & 4 & \\
 & -2 & 5 & 9 & -11 & -1 \\
\hline
2 & -5 & -9 & 11 & -7 &
\end{array}$$

Aplicando el Teorema de Besout, tenemos $f(-1) = -7 \neq 0$. Por lo tanto $x = -1$ tampoco es una raíz.

$$\begin{array}{rrrrr|r}
2 & -3 & -14 & 2 & 4 & \\
 & 4 & 2 & -24 & -44 & 2 \\
\hline
2 & 1 & -12 & -22 & -40 &
\end{array}$$

Otra vez un fracaso: $f(2) = -40 \neq 0$, y $x = 2$ no es una raíz.

$$\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -3 & -14 & 2 & 4 & \\ & -4 & 14 & 0 & -4 & -2 \\ \hline 2 & -7 & 0 & 2 & 0 & \end{array}$$

Entonces $x = -2$ es una raíz, y obtenemos la factorización

$$f(x) = (x - (-2))(2x^3 - 7x^2 + 2) = (x + 2)(2x^3 - 7x^2 + 2).$$

Ahora podemos aplicar el Teorema sobre raíces racionales al polinomio $q(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2$. En este caso $a_0 = 2$, $a_3 = 2$.
Los factores de a_0 son $\pm 1, \pm 2$.
Los factores de a_3 son $\pm 1, \pm 2$.
Por lo que, si $q(x)$ tiene raíces racionales éstas deberán ser alguno de los siguientes números:

$$a = \frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}\}.$$

Los números sospechosos $\pm 1, 2$ ya fueron analizados con una conclusión negativa. Falta considerar los últimos dos números: $x = \pm 1/2$.

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & \text{-}7 & 0 & 2 & \\ & 1 & \text{-}3 & \text{-}3/2 & 1/2 \\ \hline 2 & \text{-}6 & \text{-}3 & 1/2 & \end{array}$$

Este esquema nos da $q(1/2) = 1/2 \neq 0$, entonces $x = 1/2$ no es una raíz. Verificamos la última oportunidad:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & \text{-}7 & 0 & 2 & \\ & \text{-}1 & 4 & \text{-}2 & \text{-}1/2 \\ \hline 2 & \text{-}8 & 4 & 0 & \end{array}$$

Por el Teorema de Besout, $x = -1/2$ es una raíz, y obtenemos la factorización

$$f(x) = (x+2)(2x^3 - 7x^2 + 2) = (x+2)(x+1/2)(2x^2 - 8x + 4).$$

Ahora podemos encontrar las raíces del polinomio $2x^2 - 8x + 4$ usando la fórmula general:

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{4} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Tal que cada polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ tiene su propia factorización

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

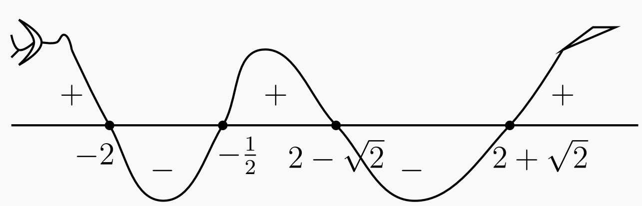
obtenemos la factorización completa del polinomio $f(x)$:

$$f(x) = (x+2)(x+1/2)(2x^2 - 8x + 4) = 2(x+2)(x+1/2)(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2}).$$

Ahora ya no tenemos más obstáculos para resolver la desigualdad

$$2(x+2)(x+0.5)(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2}) \geq 0$$

usando el método de la serpiente.



La respuesta es: $(-\infty, -2] \cup [-\frac{1}{2}, 2 - \sqrt{2}] \cup [2 + \sqrt{2}, \infty)$.

Ejemplo 6.2

Encontrar el dominio de la función

$$\log_8(3x^3 + x^2 - 12x - 4).$$

Solución: El dominio de la función logarítmica es el conjunto de todos los números positivos. Por lo tanto, un número x pertenece al dominio de la función dada si y solo si

$$3x^3 + x^2 - 12x - 4 > 0.$$

Entonces tenemos que resolver esta desigualdad.
Para aplicar el método de la serpiente, necesitamos factorizar completamente el polinomio $f(x)$ del lado izquierdo. Para usar el teorema de Besout, necesitamos encontrar las raíces de $f(x)$. Por lo tanto, buscaremos las raíces racionales de este polinomio.
Tenemos, $a_0 = -4$, $a_3 = 3$. Los factores de a_0 son $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.
Los factores de a_3 son $\pm 1, \pm 3$.
Por lo que, si $f(x)$ tiene raíces racionales estas deberán ser alguno de los siguientes números:

$$a = \frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3} \pm \frac{4}{3}\}.$$

Es decir, tenemos una lista de doce números sospechosos. Podemos verificarlos uno por uno aplicando la división sintética.

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -12 & -4 & \\ & 3 & 4 & -8 & 1 \\ \hline 3 & 4 & -8 & -12 & \end{array}$$

Según el Teorema de Besout, $x = 1$ no es una raíz de $f(x)$.

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & \text{-12} & \text{-4} & \\ & \text{-3} & 2 & 10 & \text{-1} \\ \hline 3 & \text{-2} & \text{-10} & 6 & \end{array}$$

Otro fracaso: el valor $x = -1$ tampoco es una raíz del polinomio $f(x)$.

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -12 & -4 & \\ & 6 & 14 & 4 & 2 \\ \hline 3 & 7 & 2 & 0 & \end{array}$$

¡Buena suerte! El valor $x = 2$ es una raíz. Por el Teorema de Besout, el polinomio tiene la siguiente factorización:

$$3x^3 + x^2 - 12x - 4 = (x - 2)(3x^2 + 7x + 2).$$

Buscamos las raíces del polinomio cuadrático $3x^2 + 7x + 2$ usando la fórmula general:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-7 \pm 5}{6},$$

es decir, las raíces son $x_1 = -2$, $x_2 = -1/3$. Tal que cada polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ tiene su propia factorización

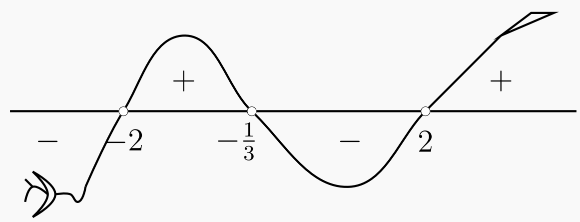
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

hemos encontrado la factorización completa del polinomio $f(x)$:

$$f(x) = (x-2)(3x^2+7x+2) = 3(x-2)(x-(-2))(x-(-1/3)) = 3(x-2)(x+2)(x+\frac{1}{3}).$$

Estamos listos para aplicar el método de la serpiente para resolver la desigualdad

$$3(x-2)(x+2)(x+\frac{1}{3}) > 0.$$



La respuesta es: $(-2, -1/3) \cup (2, \infty)$.

Ejemplo 6.3

Sea $f = \{(-18, 3); (-4, 1); (0, 7); (12, 1)\}$ y $g(x) = x^3 + x^2$. Resolver la desigualdad

$$(f \circ g)(x) \geq 2.$$

Solución: primero, debemos notar que f es un conjunto de parejas de números enteros. En el contexto del problema, f actúa como una función. El dominio de esta función es $\{-18, -4, 0, 12\}$ con valores $f(-18) = 3$, $f(-4) = 1$, $f(0) = 7$, $f(12) = 1$, mientras para todos los otros valores de x, la función f no está definida. Podemos anotarlo en la siguiente forma:

$$x = \left| \begin{array}{c} -18 \\ -4 \\ 0 \\ 12 \end{array} \right. \quad \mapsto \quad f(x) = \left| \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 7 \\ 1\ . \end{array} \right.$$

Aplicando la definición de la composición de funciones, tenemos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3 + x^2).$$

Por lo tanto, la función $f \circ g$ esta definida solo si $x^3 + x^2 \in \{-18, -4, 0, 12\}$:

$$x^3 + x^2 = \left| \begin{array}{c} -18 \\ -4 \\ 0 \\ 12 \end{array} \right. \quad \mapsto \quad f(x^3 + x^2) = \left| \begin{array}{ll} 3 & \geq 2 \\ 1 & < 2 \\ 7 & \geq 2 \\ 1 & < 2\ . \end{array} \right.$$

Si $x^3 + x^2 = -18$, entonces $(f \circ g)(x) = f(x^3 + x^2) = 3 \geq 2$ y el valor de x es una solución de la desigualdad dada.
Si $x^3 + x^2 = -4$, entonces $(f \circ g)(x) = f(x^3 + x^2) = 1 < 2$ y el valor de x no es una solución de la desigualdad dada.
Si $x^3 + x^2 = 0$, entonces $(f \circ g)(x) = f(x^3 + x^2) = 7 \geq 2$ y el valor de x es una solución de la desigualdad.
Si $x^3 + x^2 = 12$, entonces $(f \circ g)(x) = f(x^3 + x^2) = 1 < 2$ y el valor de x no es una solución de la desigualdad.
Por lo anterior, falta resolver los dos ecuaciones $x^3 + x^2 = -18$ y $x^3 + x^2 = 0$, ó, en otras palabras, tenemos que encontrar todas las raíces de los polinomios $x^3 + x^2 + 18$ y $x^3 + x^2$.
Tratamos de encontrar las raíces racionales. Para el primer polinomio, tenemos, $a_0 = 18$, $a_3 = 1$. Por lo que, si $f(x)$ tiene raíces racionales estas deberán ser alguno de los siguientes números:

$$a = \frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9 \pm 18\}.$$

Podemos verificarlos uno por uno, aplicando la división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 0 & 18 & \\
 & 1 & 2 & 2 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 2 & 20 &
\end{array}$$

Según el Teorema de Besout, $x = 1$ no es una raíz.

$$\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 0 & 18 & \\
 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 18 &
\end{array}$$

Según el Teorema de Besout, $x = -1$ tampoco es una raíz.

$$\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 0 & 18 & \\
 & 2 & 6 & 12 & 2 \\
\hline
1 & 3 & 6 & 30 &
\end{array}$$

Entonces, $x = 2$ no es una raíz.

$$\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 0 & 18 & \\
 & -2 & 2 & -4 & -2 \\
\hline
1 & -1 & 2 & 14 &
\end{array}$$

Es decir, $x = -2$ tampoco es una raíz.

$$\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 0 & 18 & \\
 & 3 & 12 & 36 & 3 \\
\hline
1 & 4 & 12 & 54 &
\end{array}$$

Otro fracaso.

$$\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 0 & 18 & \\
 & -3 & 6 & -18 & -3 \\
\hline
1 & -2 & 6 & 0 &
\end{array}$$

¡Buena suerte! El valor $x = 3$ es una raíz. Por el Teorema de Besout, tenemos la siguiente factorización:

$$x^3 + x^2 + 18 = (x + 2)(x^2 - 2x + 6).$$

Buscamos las raíces del cociente $x^2 - 2x + 6$ usando la fórmula general:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-20}}{2},$$

es decir, el polinomio $x^2 - 2x + 6$ no tiene raíces reales. Finalmente vemos que el único valor real de x, que cumple $x^3 + x^2 = -18$ es $x = 3$.
Consideramos la segunda ecuación $x^3 + x^2$. Podemos factorizarla fácilmente:

$$x^3 + x^2 = x^2(x + 1).$$

De donde vemos que tiene dos raíces $x = 0$, $x = -1$.

La respuesta es: $x = -3$, $x = 0$, $x = -1$.

7. Raíces complejas

Prerrequisitos

- Conjuntos de números; números complejos; división sintética.

Objetivos específicos

- Explicar el teorema fundamental del álgebra.
- Resolver algunas ecuaciones polinómicas con coeficientes reales si se conoce al menos una de sus raíces complejas.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA. *Cada polinomio de grado positivo* *con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja.*

Si $x = \alpha_1$ es una raíz del polinomio $f(x)$, entonces por el Teorema de Besout, usando la división sintética, podemos factorizar

$$f(x) = (x - \alpha_1)q_1(x).$$

El grado del cociente $q_1(x)$ es una unidad menor que el grado de $f(x)$. Si $q_1(x)$ no es constante, podemos aplicar el Teorema fundamental del álgebra a $q_1(x)$. Sea $x = \alpha_2$ una raíz de $q_1(x)$. Aplicando la división sintética, encontramos la descomposición

$$f(x) = (x - \alpha_1)q_1(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)q_2(x).$$

Continuando este algoritmo, podemos factorizar el polinomio $f(x)$ completamente,

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)a_n,$$

donde

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números complejos; y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son todas raíces de $f(x)$.

Esta descomposición para los polinomios cuadráticos es bien conocida desde los cursos de preparatoria:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Por supuesto, se puede considerar a los números reales como números complejos con componente imaginario cero, $a = a + 0i$. Entonces el Teorema fundamental de álgebra se aplica a los polinomios con coeficientes reales. En este caso, el Teorema fundamental nos dice que un polinomio real tiene al menos una raíz compleja. Esto lo podemos finalizar con la siguiente propiedad adicional muy importante:

Si $\alpha = a+bi$ es una raíz compleja del polinomio $f(x)$ con coeficientes reales, entonces el número conjugado $\bar{\alpha} = a - bi$ también es una raíz de $f(x)$.

Ejemplo 7.1

Demostrar que $\alpha = -2 + 3i$ es una raíz del polinomio

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 18x + 26.$$

Factorizar completamente este polinomio.
Solución: Aplicamos el algoritmo de la división sintética.

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 7 & -18 & 26 & \\ & -2+3i & -9-6i & 22+6i & -26 & -2+3i \\ \hline 1 & 3i & -2-6i & 4+6i & 0 & \end{array}$$

Según el Teorema de Besout, $f(-2+3i) = 0$. Por lo tanto $-2+3i$ es una raíz de $f(x)$ y tenemos la factorización

$$f(x) = (x + 2 - 3i)(x^3 + 3ix^2 - (2 + 6i)x + 4 + 6i).$$

Tal que $\bar{\alpha} = -2 - 3i$ también es una raíz, podemos continuar el algoritmo de factorización.

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & 3i & -2-6i & 4+6i & \\
 & -2-3i & 4+6i & -4-6i & -2-3i \\
\hline
1 & -2 & 2 & 0 &
\end{array}
$$

Este esquema implica la descomposición

$$f(x) = (x+2-3i)(x+2+3i)(x^2-2x+2).$$

El cociente x^2-2x+2 es un polinomio cuadrático, entonces podemos usar la fórmula general para encontrar sus raíces:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4\cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

Por lo tanto

$$x^2-2x+2 = (x-1-i)(x-1+i).$$

La respuesta es: $f(x) = (x+2-3i)(x+2+3i)(x-1-i)(x-1+i)$.

Ejemplo 7.2

Encontrar el cociente y el residuo de la división del polinomio

$$f(x) = ix^4 + (2+2i)x^3 - (3-i)x^2 + (-3+6i)x - 3$$

entre $g(x) = ix^2 + (1+i)x - (2-i)$.

Solución: Realizamos el esquema de Euclides para la división:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 + (1-i)x + 3i \\ \cline{2-2}
ix^2 + (1+i)x - (2-i) & ix^4 + (2+2i)x^3 - (3-i)x^2 + (-3+6i)x - 3 \\
 & -ix^4 - (1+i)x^3 + (2-i)x^2 \\ \cline{2-2}
 & (1+i)x^3 - x^2 + (-3+6i)x - 3 \\
 & -(1+i)x^3 - 2x^2 + (1-3i)x \\ \cline{2-2}
 & -3x^2 + (-2+3i)x - 3 \\
 & 3x^2 + (3-3i)x + (3+6i) \\ \cline{2-2}
 & x + 6i\,.
\end{array}$$

En el primer paso, dividimos ix^4 entre ix^2 y encontramos el máximo exponente del cociente: x^2.
En el segundo paso dividimos $(1+i)x^3$ entre ix^2. El resultado, $(1-i)x$, es otro término del cociente. Tal que $(1-i)(1+i) = 2$, $(1-i)(2-i) = 1-3i$, encontramos el quinto renglón del esquema.
En el tercer paso, dividimos $-3x^2$ entre ix^2. El resultado, $3i$, es el último término del cociente. Tal que $3i(1+i) = -3+3i$, $3i(2-i) = 3+6i$, encontramos el séptimo renglón del esquema y el residuo.

La respuesta es: $q(x) = x^2 + (1-i)x + 3i$, $r(x) = x + 6i$.