NOTAS DE NÚMEROS COMPLEJOS

Alma Virginia Lara Sagahón, Vladislav Khartchenko, Antonio Trejo Lugo, Angélica Espinosa Godínez, José Luis Garza Rivera

Índice

1. Introducción

Recordemos que al elevar al cuadrado un número real, sea positivo o negativo, el resultado es positivo. Entonces ¿como resolver ecuaciones como

$$x^2 = -1?$$

Es claro que x no es un número real. Para resolver este tipo de ecuaciones se tiene al conjunto de números complejos. La aparición de problemas con raíces de números negativos se tiene registrada desde los primeros siglos de nuestra era, pero fue hasta el siglo XVIII que la teoría de los números complejos se formalizó con los trabajos de Leonhar Euler (1707-1783) y de Carl Friedrich Gauss (1777-1856). Euler introdujo el símbolo i para la raíz de menos uno, por la palabra imaginario. Veamos que son los números complejos.

Objetivo general

Describir el conjunto de números complejos y realizar operaciones en sus diferentes formas.

2. Números imaginarios

Prerrequisitos

- Conceptos básicos de conjuntos.
- Conjuntos numéricos.

Objetivos específicos

- Describir el conjunto de números imaginarios.
- Describir el número i.
- Calcular las potencias del número i.

Se llaman números imaginarios a los números de la forma bi en donde

$$i = \sqrt{-1},$$

y b es un número real.

Al número i se le llama **unidad imaginaria.**

Los números imaginarios se obtienen al calcular las raíces cuadradas de números negativos. Por ejemplo,

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 * -1} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i.$$

Los números imaginarios permiten resolver ecuaciones de la forma

$$x^2 + a = 0,$$

donde $a > 0$, la solución es

$$x = \pm\sqrt{-a} = \pm\sqrt{a}i.$$

Ejemplo 2.1

Resolver $x^2 + 16 = 0$.

Solución:

$x = \pm\sqrt{-16} = \pm\sqrt{16}i = \pm 4i$.

Una propiedad del número i es que sus potencias i^n son cíclicas (n es entero, $n \geq 0$):

$$\begin{aligned} i^0 &= 1, \\ i^1 &= i, \\ i^2 &= (\sqrt{-1})^2 = -1, \\ i^3 &= i^2 * i = -i, \\ i^4 &= i^3 * i = -i^2 = 1, \\ i^5 &= i^4 i = i. \end{aligned}$$

Es decir el ciclo reinicia cuando la potencia n es un múltiplo de 4. Para calcular i^n se eleva i a la potencia r, donde r es el residuo de la división $n/4$. Por ejemplo, para calcular i^{31} se eleva i a la potencia 3, ya que 3 es el residuo al dividir 31 entre 4, por lo tanto $i^{31} = i^3 = -i$.

3. Forma binómica

Prerrequisitos

- Conceptos básicos de conjuntos.
- Conjuntos numéricos.

Objetivos específicos

- Describir el conjunto de números complejos en forma binómica.

- Identificar el opuesto y el conjugado de un número complejo.
- Determinar si dos números complejos son iguales.

Los números complejos tienen la forma binómica $a + bi$, en donde a y b son números reales.

El número a es la parte real del número complejo.

El número b es la parte imaginaria del número complejo.

Si $b = 0$, tenemos $a + 0i = a$, esto es un número real. Este resultado nos permite ver que **el conjunto de los números reales es un subconjunto del conjunto de los números complejos**.

Si $a = 0$, tenemos $0 + bi = bi$ que es un número imaginario puro. Por lo tanto, **el conjunto de números imaginarios es un subconjunto del conjunto de los números complejos**.

El conjunto de todos los números complejos se denota como $\mathbb{C}$ y se describe como

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}.$$

La **igualdad** $a + bi = c + di$ implica que $a = c$ y $b = d$.

El **conjugado** del número complejo $a + bi$ es el número $a - bi$. Por ejemplo, el conjugado de $1 + i$ es el número $1 - i$ y el conjugado de $-1 + i$ es $-1 - i$. También se puede decir que los números $a + bi$ y $a - bi$ son números complejos conjugados. Si $Z = a + bi$ el conjugado de Z se denota como $\bar{Z}$ o $\|Z\|$.

El **opuesto** del número complejo $a + bi$ es el número $-a - bi$. Por ejemplo el opuesto de $2 + i$ es $-2 - i$ y el opuesto de $2 - i$ es $-2 + i$.

4. Operaciones en forma binómica

Prerrequisitos

- Conceptos básicos de conjuntos.
- Conjuntos numéricos.

Objetivos específicos

- Sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos en forma binómica.

A continuación se explica la forma de realizar las cuatro operaciones básicas que son **suma**, **resta**, **multiplicación** y **división** de números complejos en forma binómica.

- **Suma**. Se suma parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria,
$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

Ejemplo 4.1 Suma en forma binómica

$$(7+10i)+(4+5i)=(7+4)+(10+5)i=11+15i.$$

- **Resta**. Se resta parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria,
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Ejemplo 4.2 Resta en forma binómica

$$(-3+5i)-(4+7i)=(-3-4)+(5-7)i=-7-2i.$$

- **Multiplicación**. Se realiza multiplicando los binomios, tomando en cuenta que $i^2=-1$,
$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Ejemplo 4.3 Multiplicación en forma binómica

$$(2+i)(-1+2i)=-2+4i-i+2i^2=-4+3i.$$

- **División**. Para realizar la operación
$$\frac{a+bi}{c+di}$$
se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador,

$$
\begin{aligned}
\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\
&= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.4 División en forma binómica

$$\frac{5-4i}{2+3i} = \frac{(5-4i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{10-15i-8i+12i^2}{4+9} = -\frac{2}{13} - \frac{23}{13}i.$$

5. Forma trigonométrica

Prerrequisitos

- Conceptos básicos de conjuntos.
- Conjuntos numéricos.
- trigonometría básica.

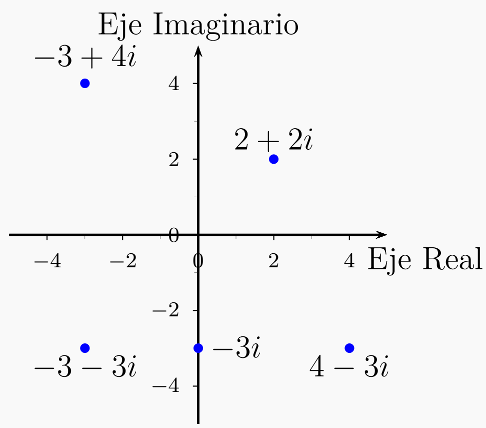
Objetivos específicos

- Transformar números complejos en forma binómica a forma trigonométrica y viceversa, de trigonométrica a polar.
- Multiplicar y dividir números complejos en forma trigonométrica.

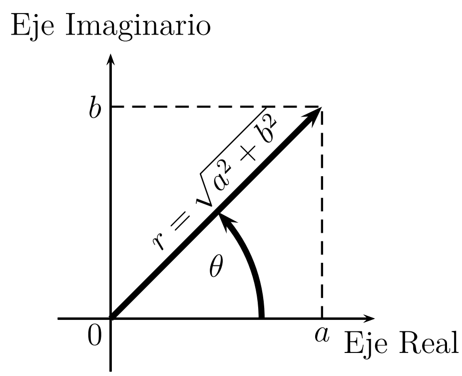
La representación gráfica de un número $a+bi$ es un punto en el plano cartesiano con coordenas (a,b). El eje de las abcisas o eje X se utiliza para la parte real, y el eje de las ordenadas o eje Y para la parte imaginaria. Al punto (a,b) se le llama **afijo** del número complejo. Al plano donde se grafican los números complejos se le llama **plano complejo**.

Ejemplo 5.1 Representación gráfica

Graficar los números $2+2i$, $-3+4i$, $-3-3i$, $-3i$, y $4-3i$.



Otra forma de representar gráficamente el número $z = a + bi$ es mediante un vector trazado desde el origen $(0, 0)$ al punto (a, b), como se puede observar en la siguiente figura.



- El **módulo** de $Z = a + bi$ es la distancia del origen (0,0) al afijo del número complejo (a, b). En la figura anterior se puede ver que se forma un triángulo rectángulo con vértices en los puntos $(0, 0)$, $(a, 0)$, y (a, b). Por el teorema de Pitágoras el **módulo** del número $Z = a + bi$, que se denota como $|Z|$ o como r, está dado por

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- El **argumento** del número complejo $Z = a + bi$, denotado como θ, es igual al ángulo que se forma entre la parte positiva del eje real y el vector del origen al afijo. Por trigonometría se tiene que θ es el ángulo cuya tangente es $\frac{b}{a}$, en otras palabras el argumento está dado por la función arcotangente.

$$\theta = \arctan \frac{b}{a} = \tan^{-1} \frac{b}{a}.$$

  El argumento θ puede darse en **grados o en radianes**. Sin embargo, es necesario notar que la definición anterior es un tanto débil, porque el rango de la función arcotangente es el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ o equivalentemente de -90 a 90 grados. Entonces ¿como determinar el argumento correcto cuando el afijo está en el segundo, tercer o cuarto cuadrante del plano complejo y por lo tanto θ es mayor o igual a 90 grados? La periodicidad de la función tangente permite resolver esta situación con la relación que se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. Relaciones para determinar el argumento

$\alpha = \arctan \frac{b}{a}$			
a	b	Cuadrante	θ
> 0	≥ 0	Primero	α
< 0	≥ 0	Segundo	$\alpha + 180°$
< 0	≤ 0	Tercero	$\alpha + 180°$
> 0	≤ 0	Cuarto	$\alpha + 360°$
> 0	0		$0°$
< 0	0		$180°$
0	> 0		$90°$
0	< 0		$270°$

Por trigonometría se tienen las siguientes relaciones:

$$a = r\cos\theta$$

$$b = r \operatorname{sen}\theta$$

Por lo tanto $Z = a + bi = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$. De donde

$$Z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

es la forma trigonométrica de Z.

Es importante señalar que en algunos textos a la forma trigonométrica también se le llama **forma polar**, sin embargo hay otros documentos en los que se le llama forma polar a la notación abreviada $r_{\angle\theta}$. Otra forma común de abreviar la forma polar o trigonométrica es con la notación r cis θ.

Ejemplo 5.2

Transformar a forma trigonométrica $Z = 1 + \sqrt{3}i$

Solución:

Se calcula el módulo Z,

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

Se calcula el argumento de Z, como el afijo $(1, \sqrt{3})$ está en el primer cuadrante, entonces (ver Tabla 1)

$$\theta = \arctan\frac{\sqrt{3}}{2} = 60°.$$

Respuesta: $Z = 2(\cos 60° + i\,\mathrm{sen}\,60°) = 2_{\angle 60°} = 2$ cis $60°$.

Ejemplo 5.3

Transformar a forma trigonométrica $Z = -1 - i$.

Solución:

Se calcula el módulo de Z,

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Se calcula el argumento de Z, como $a = -1 < 0$, y $b = -1 < 0$, el afijo (-1,-1) se sitúa en el tercer cuadrante, entonces de acuerdo a la Tabla1

$$\alpha = \arctan 1 = 45^\circ.$$

$$\theta = (180 + 45)^\circ = 225^\circ.$$

Respuesta: $Z = \sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ) = 2_{\angle 225^\circ} = 2 \text{ cis } 225^\circ$.

Ejemplo 5.4

Escribir en forma binómica $Z = 6(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ)$.

Solución:

$$a = 6 \cos 210^\circ = -3\sqrt{2},$$
$$b = 6 \operatorname{sen} 210^\circ = -3.$$

Respuesta:

$$Z = 6(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = -3\sqrt{2} - 3i.$$

Ejemplo 5.5

Escribir en forma binómica

$$Z = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}).$$

solución:

$$\begin{aligned} a &= 2\cos\frac{\pi}{2} = 0, \\ b &= 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -1. \end{aligned}$$

Respuesta:

$$Z = -i$$

La **multiplicación** de números complejos en forma trigonométrica se realiza multiplicando sus módulos y sumando sus argumentos. Si tenemos los números complejos $Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ y $Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$, entonces el producto es

$$Z_1Z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) = r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2))$$

Ejemplo 5.6

Sean $Z_1 = 3(\cos 110° + i\sin 110°)$ y $Z_2 = 4(\cos 35° + i\operatorname{sen} 35°)$, calcular Z_1Z_2.

Solución:

$$\begin{aligned} Z_1Z_2 &= 3(\cos 110° + i\sin 110°) * 4(\cos 35° + i\operatorname{sen} 35°) \\ &= 4 * 3(\cos(110+35)° + i\operatorname{sen}(110+35)°) \\ &= 12(\cos 135° + i\operatorname{sen} 135°) \end{aligned}$$

Sean los números complejos $Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ y $Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$, entonces la **división** está dada por

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2))$$

Ejemplo 5.7

Sean $Z_1 = 6(\cos 140° + i \sin 140°)$ y $Z_2 = 2(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$, calcular $\dfrac{Z_1}{Z_2}$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{6(\cos 140° + i \sin 140°)}{2(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)} \\
&= \frac{6}{2}(\cos(140-20)° + i \operatorname{sen}(140-20)°) \\
&= 3(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)
\end{aligned}$$

6. Potencias y raíces

Prerrequisitos

- Números complejos en forma binómica y trigonométrica.

Objetivos específicos

- Elevar a potencias números complejos en forma trigonométrica.
- Calcular raíces de números complejos.

Sea n un número entero, para **elevar a una potencia** n un número complejo Z en forma trigonométrica se utiliza la fórmula del teorema de De Moivre:

$$Z^n = (r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

Ejemplo 6.1

Sea $Z = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$, calcular Z^4 y expresar el resultado en forma binómica.

Solución:

Utilizando la fórmula de De Moivre se tiene

$$\begin{aligned} Z^4 &= (2(\cos 30° + i \sin 30°)^4 \\ &= 2^4(\cos(4 * 30)° + i \sin(4 * 30)°) \\ &= 16(\cos 120° + i \sin 120°) \end{aligned}$$

Expresando en forma binómica

$$16(\cos 120° + i \sin 120°) = -8 + 8\sqrt{3}i$$

Ejemplo 6.2

Sea $Z = 3(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$, calcular Z^3 y expresar el resultado en forma binómica.

Solución:

Utilizando la fórmula de De Moivre se tiene

$$\begin{aligned} Z^3 &= (3(\cos 210° + i \sin 210°)^3 \\ &= 3^3(\cos(3 * 210)° + i \sin(3 * 210)°) \\ &= 27(\cos 630° + i \sin 630°) \\ &= 27(\cos 270° + i \sin 270°). \end{aligned}$$

(Nota: $630° = 630° - 360° = 270°$.)
Expresando en forma binómica

$$27(\cos 270° + i \sin 270°) = -27i.$$

Ejemplo 6.3

Calcular $(1-i)^4$ expresando el argumento en radianes.

Solución:

Transformando a forma trigonométrica se tiene que

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2}_{\angle\frac{7\pi}{4}}$$

.

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}))^4 &= \sqrt{2}^4(\cos(4*\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}(4*\frac{7\pi}{4})\\ &= 4(\cos 7\pi + i\operatorname{sen} 7\pi)\\ &= 4(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)\\ &= -4.\end{aligned}$$

Las **raíces n-ésimas** de un número complejo en forma trigonométrica se calculan mediante la fórmula

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta + k360°}{n} + i\frac{\theta + k360°}{n}),$$

donde $k = 0,\, 1,\, 2, \ldots, n-1$, y n es entero positivo.

Al calcular $\sqrt[n]{Z}$ se encuentran Z_i números con $i = 1,\, 2, \ldots, n$ que cumplen $Z_i^n = Z$.

En forma abreviada $\sqrt[n]{r_{\angle\theta}} = \sqrt[n]{r}_{\angle\frac{\theta+k360°}{n}}$, $k = 0,\, 1,\, 2, \ldots,\, n-1$.

Ejemplo 6.4

Sea $Z = -\sqrt{3} + i$. Calcular $\sqrt[4]{Z}$, expresar los resultados en forma trigonométrica y binómica.

Solución:

Primero se transforma Z a forma trigonométrica:

$$r = \sqrt{3^2 + 1^2} = 2.$$

$$\theta = \arctan -\frac{1}{\sqrt{3}} = 150°.$$

$$-\sqrt{3} + i = 2(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°) = 2_{\angle 150°}$$

.

Utilizaremos la forma abreviada para calcular $\sqrt[4]{2_{\angle 150°}}$. Aplicando la fórmula

$$\sqrt[n]{r_{\angle\theta}} = \sqrt[n]{r}_{\angle \frac{\theta + k360°}{n}},\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1,$$

se obtienen las siguientes raíces.

- Primera raíz, $k = 0$: $\sqrt[4]{2}_{\angle \frac{150°}{4}} = \sqrt[4]{2}_{\angle 37.5°} \approx 0.9434 + 0.7239i$.
- Segunda raíz, $k = 1$: $\sqrt[4]{2}_{\angle \frac{150° + 360°}{4}} = \sqrt[4]{2}_{\angle 127.5°} \approx -0.7239 + 0.9434i$.
- Tercera raíz, $k = 2$: $\sqrt[4]{2}_{\angle \frac{150° + 2*360°}{4}} = \sqrt[4]{2}_{\angle 217.5°} \approx -0.9434 + -0.7239i$.
- Cuarta raíz, $k = 3$: $\sqrt[4]{2}_{\angle \frac{150° + 3*360°}{4}} = \sqrt[4]{2}_{\angle 307.5°} \approx 0.7239 + -0.9434i$.

Ejemplo 6.5

Sea $Z = 2 - 11i$. Calcular $\sqrt[3]{Z}$, expresar los resultados en forma polar y binómica.

Solución:

Primero se transforma Z a forma trigonométrica, utilizaremos radianes para el argumento

$$r = \sqrt{2^2 + (-11)^2} = 5\sqrt{5}.$$

Como el afijo de Z se encuentra en el cuarto cuadrante del plano complejo, entonces

$$\theta = 2\pi + \arctan -\frac{11}{\sqrt{2}} \approx 4.8922.$$

$$2 - 11i \approx 5\sqrt{5}_{\angle 4.8922}$$

.

Aplicando la fórmula

$$\sqrt[n]{r_{\angle\theta}} = \sqrt[n]{r}_{\angle \frac{\theta + k2\pi}{n}},\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1,$$

se obtienen las siguientes raíces.

- Primera raíz, $k = 0:\ (5\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}_{\angle \frac{4.8922}{3}} \approx -0.1340 + 2.2320i.$
- Segunda raíz, $k = 1:\ (5\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}_{\angle \frac{4.8922+2\pi}{3}} \approx -18660 - 1.2320i$
- Tercera raíz, $k = 2:\ (5\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}_{\angle \frac{4.8922+4\pi}{3}} = 2 - i.$

Ejemplo 6.6

Resolver la ecuación $x^5 - 32 = 0$ y graficar la respuesta.

Procedimiento:

Despejamos x para obtener la solución

$$x = \sqrt[5]{32}.$$

Una de las raíces es el número real 2. Para encontrar las cinco raíces cúbicas de 32, transformamos 32=32+0i a forma trigonométrica,

$$r = \sqrt{32^2 + 0^2} = 32$$

$32 + 0i = 32_{\angle 0^\circ}$, ya que el afijo (32,0) está en el lado positivo del eje X.

Aplicando la fórmula

$$\sqrt[n]{r_{\angle\theta}} = \sqrt[n]{r}_{\angle \frac{\theta + k360^\circ}{n}},\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1,$$

se obtienen las siguientes raíces.

- $k = 0:\ \sqrt[5]{32})_{\angle \frac{0^\circ}{5}} = 2_{\angle 0^\circ} = 2.$
- $k = 1:\ \sqrt[5]{32})_{\angle \frac{360^\circ}{5}} = 2_{\angle} 72^\circ \approx 0.6180 + 1.9021i.$
- $k = 2:\ \sqrt[5]{32})_{\angle \frac{2*360^\circ}{5}} = 2_{\angle 144^\circ} \approx -1.6180 + 1.1755i.$
- $k = 3:\ \sqrt[5]{32})_{\angle \frac{3*360^\circ}{5}} = 2_{\angle 216^\circ} \approx -1.6180 - 1.1755i.$
- $k = 4:\ \sqrt[5]{32})_{\angle \frac{4*360^\circ}{5}} = 2_{\angle 288^\circ} \approx 0.6180 - 1.9021i.$

En la siguiente figura se muestra la gráfica de las raíces.