NOTAS DE RELACIONES Y FUNCIONES

Alma Virginia Lara Sagahón, Vladislav Khartchenko, Antonio Trejo Lugo, Angélica Espinosa Godínez, José Luis Garza Rivera

Índice

1. Introducción

Desde tiempos antiguos los matemáticos establecieron relaciones entre conjuntos de números. Por ejemplo, se han encontrado tablas hechas por babilonios con los cuadrados, los cubos y los inversos de los números naturales. De acuerdo a la teor ía de relaciones y funciones que revisaremos en esta unidad, las tablas de los babilonios son lo que hoy conocemos como funciones. Desde luego los babilonios no sabían la teorí a de conjuntos y tampoco la de relaciones y funciones en la manera actual. La evolución del conocimiento para llegar al concepto de función que utilizamos hoy fue labor de sesudos matemáticos durante varios siglos. En este tema destacan los nombres de Nicole Oresme (1323-1382), Galileo Galilei (1569-1642), René Descartes (1596-1650), Johann Bernoulli (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783) y Eduard Goursat (1858-1936) quien estableció en 1923 la definición de función que se usa en los libros de texto contemporáneos.

Las funciones tienen una amplia aplicación en diferentes ciencias, ya que se utilizan como modelos matemáticos de fenómenos físicos, químicos, biológicos, sociales, económicos, etc.

Objetivo General. Explicar los conceptos de la teoría de relaciones y funciones.

2. Producto cartesiano

Prerrequisitos

- Teoría de conjuntos; conjuntos de números.

Objetivos específicos

- Explicar par ordenado y producto cartesiano.
- Aplicar el concepto de producto cartesiano en la solución de problemas.

El producto cartesiano entre dos conjuntos cualesquiera A y B es el conjunto denotado como $A \times B$ (se lee A cruz B) cuyos elementos son todas las parejas (a, b) que se pueden formar con el requisito de que $a \in A$ y $b \in B$.

Los elementos (a, b) se llaman parejas ordenadas, el nombre es redundante, pero as se enfatiza que el primer componente de la pareja, a, pertenece al primer conjunto del producto cartesiano $A \times B$ y el componente b, al segundo.

La palabra cartesiano proviene del nombre del filósofo, matemático y físico francés René Descartes (1596-1650) quien fue el creador del plano cartesiano que se utiliza en la presentación gráfica tanto del producto cartesiano como de las relaciones y de las funciones.

Ejemplo 2.1

Sean $A = \{-1, 1\}$ y $B = \{a, e, i\}$, encontrar $A \times B$, y $B \times A$.

Solución:

$$A \times B = \{(-1, a); (-1, e); (-1, i); (1, a); (1, e); (1, i)\},$$

$$B \times A = \{(a, -1); (a, 1); (e, -1); (e, 1); (i, -1); (i, 1)\}.$$

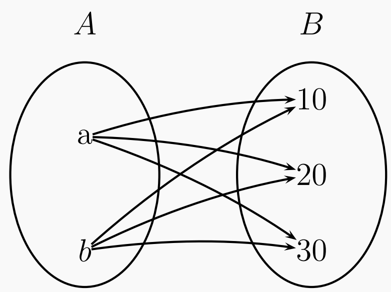
Se puede observar que $A \times B$ es diferente de $B \times A$ por lo tanto el producto cartesiano no cumple la ley conmutativa.

En el siguiente ejemplo se muestra un diagrama, llamado de flechas o sagital, utilizado para la representación gráfica del producto cartesiano.

Ejemplo 2.2

Sean $A = \{a, b\}$ y $B = \{10, 20, 30\}$, encontrar el producto cartesiano y representarlo en un diagrama sagital.
Solución:

$$A \times B = \{(a, 10); (a, 20); (a, 30); (b, 10); (b, 20); (b, 30)\}.$$



Ejemplo 2.3

Sean los conjuntos $\Omega = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $A = \{-2, 0, 2\}$, $B = \{-3, 0, 1\}$ y $C = \{-3, -1, 1, 2\}$ encontrar

$$(A \cup B)^c \times (B - C).$$

Solución:

$$(A \cup B)^c = \{-1, 3\},$$

$$B - C = \{0\},$$

$$(A \cup B)^c \times (B - C) = \{(-1, 0); (3, 0)\}.$$

3. Relaciones

Prerrequisitos:

- Teoría de conjuntos; conjuntos de números.

Objetivos específicos

- Definir relación.
- Describir relaciones por extensión, por comprensión y gráficamente.
- Describir el dominio y el rango de una relación.

Una **relación** entre los elementos del conjunto A y los elementos del conjunto B es un subconjunto de $A \times B$. Cualquier subconjunto $R \subset (A \times B)$ define una relación. Si $(a, b) \in R$, se dice que a y b está n en la relación R, o se escribe simbólicamente como $a\,R\,b$.

Ejemplo 3.1

Sea T el conjunto de todas las parejas (a, b) de números reales tales que a es menor b. Esta relación tiene como notación usual “ $<$ ”. Entonces $(a, b) \in T$ obtiene la forma $a < b$.

Ejemplo 3.2

Sea I un conjunto de parejas (a, b) tales que a es igual a b. Esta relación tiene como notación usual “ $=$ ”. Es decir la expresión $(a, b) \in I$ obtiene la forma $a = b$.

El ***dominio*** de una relación R es el conjunto que contiene a todos los elementos a de los pares (a, b) que pertenecen a R. Las notaciones son Dom_R, D_R o $D(R)$.

El ***rango*** (recorrido o imagen) de una relación R es el conjunto que contiene a todos los elementos b de los pares (a, b) que pertenecen a R. Se denota como $Rango(R)$.

Puesto que las relaciones son conjuntos, entonces se pueden describir por extensión, por comprensión o de manera gráfica.

Ejemplo 3.3

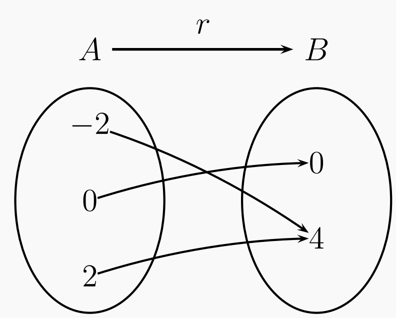
Sea $A = \{-2, 0, 2\}$ y $B = \{0, 4\}$. La relación

$$r = \{(-2, 4); (0, 0); (2, 4)\}$$

es un subconjunto del producto cartesiano

$$A \times B = \{(-2, 0); (-2, 4); (0, 0); (0, 4); (2, 0); (2, 4)\}.$$

El diagrama de flechas de r es:



Ejemplo 3.4

Encontrar el dominio y el rango de $R = \{(3, 4); (3, 9); (5, 9); (7, 9)\}$.

Solución:

El dominio de R es $\{3, 5, 7\}$.

El rango de R es $\{4, 9\}$.

Ejemplo 3.5

Describir por comprensión y de manera gráfica la relación

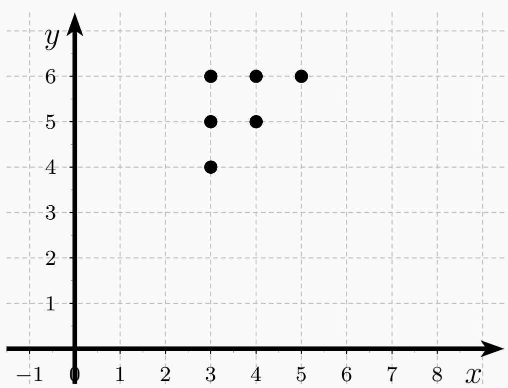
$$R = \{(3,4); (3,5); (3,6), (4,5); (4,6); (5,6)\}.$$

Solución:

Por comprensión se tiene

$$R = \{(x,y) \mid y > x, x \in \{3,4,5\}, y \in \{4,5,6\}\}.$$

Esta relación se puede describir gráficamente en el plano cartesiano, cada par ordenado de R es un punto (x,y) en el plano.



Ejemplo 3.6

Describir por compresión y con un diagrama sagital la relación

$$G = \{(Litio, 3); (Sodio, 11); (Potasio, 19); (Rubidio, 37); (Cesio, 55); (Francio, 87)\}.$$

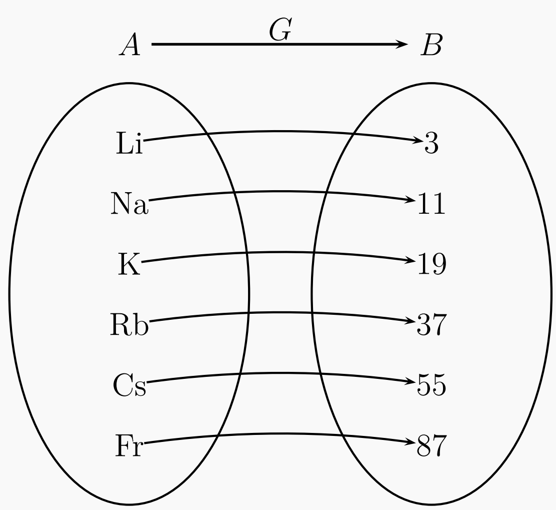
Indicar el dominio y el rango de G.

Solución:

La descripción por comprensión es

$$G = \{(x, y) \mid y \text{ es el número atómico del metal alcalino } x\}.$$

El siguiente es el diagrama sagital de G



El dominio de G es $A = \{Li, Na, K, Rb, Cs, Fr\}$.

El rango de G es $B = \{3, 11, 19, 37, 55, 87\}$.

Otras formas de denotar la relación $a\,R\,b$ es $A \xrightarrow{R} B$ o $R : A \to B$ que se lee como R es la relación de A hacia B.

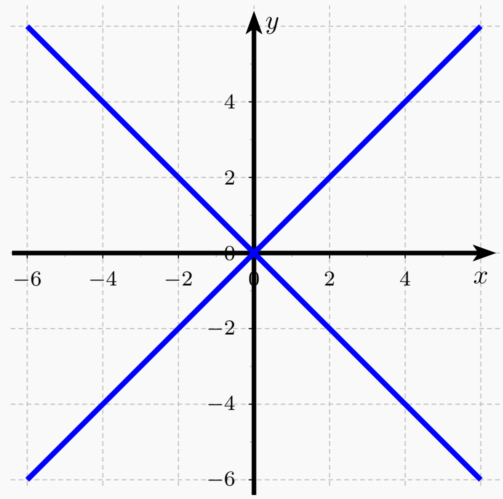
Ejemplo 3.7

Trazar la gráfica de $\mathbb{R} \xrightarrow{r} \mathbb{R}$ definida como $r = \{(x, y) \mid y = \pm x\}$.

Solución:

Para graficar una relación $r \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en el plano cartesiano se encuentran algunos puntos que la satisfacen y se unen con una línea continua.

x	y
-2	-2
-2	2
0	0
1	1
1	-1



4. Funciones

Prerrequisitos

- Teoría de conjuntos; conjuntos de números, intervalos, desigualdades, producto cartesiano, relaciones.

Objetivos específicos

- Definir función.
- Distinguir cuando una relación es una función.

- Determinar el dominio y el rango de relaciones y funciones de valores reales.

Una relación $f \subset A \times B$ se llama ***función*** si para cada $a \in A$ existe no más de un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. Se denota como $b = f(a)$.

En otras palabras, una función es una relación en la cual no hay dos parejas ordenadas distintas con el mismo primer elemento.
Se puede definir una función f en la forma

$$f(x) = \text{una expresión de}\, x.$$

Esto significa que f contiene a todas las parejas $(x, \text{expresión de}\, x)$. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2 + 1$ es el conjunto de todas las parejas $(x, x^2 + 1)$ cuando x recorre a los números reales.

El ***dominio*** de una función f que se denota como Dom_f, D_f o $D(f)$, es el conjunto que contiene a todos los elementos x de los pares (x, y) que pertenecen a f.

El ***rango*** (recorrido o imagen) de una función f que se denota $Rango(f)$, es el conjunto que contiene a todos los elementos y de los pares (x, y) que pertenecen a f.

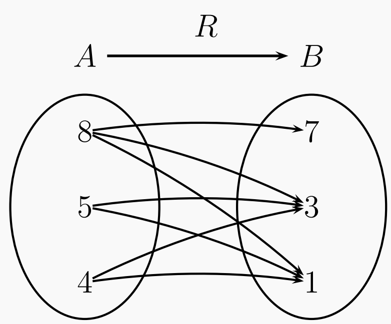
Ejemplo 4.1

Indicar si la relación $R = \{(4,1);(4,3);(5,1);(5,3);(8,1);(8,3);(8,7)\}$ es una función.

Solución:

R no es una función ya que para el elemento 4 del dominio, existen dos elementos, 1 y 3, tales que (4,1) y (4,3) pertenecen a R. Los otros elementos del dominio, 5 y 8, también conforman más de una pareja ordenada de la relación. Se puede decir que R no es una función porque diferentes parejas tienen el mismo primer elemento.

Cuando una relación no es una función, en el diagrama de flechas se ve que de algún elemento $a \in A$ surge más de una flecha hacia elementos de B, como en el diagrama siguiente de este ejemplo.

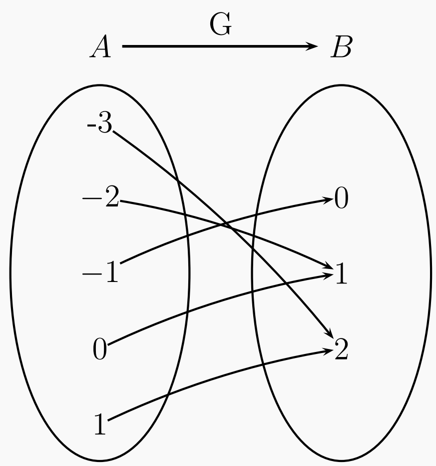


Ejemplo 4.2

Indicar si la relación $G = \{(-3,2);(-2,1);(-1,0);(0,1);(1,2)\}$ es una función.

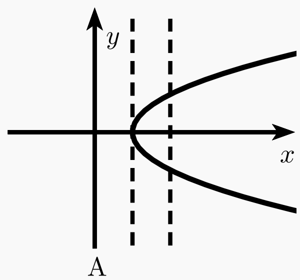
Soluci n:

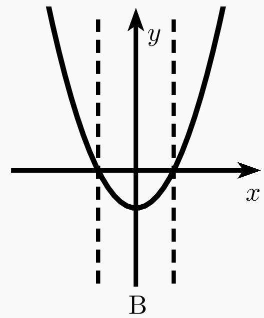
G es una función pues cada elemento del dominio $\{-3,-2,-1,0,1\}$ está en solo uno de los pares ordenados de G. Cuando una relación es una función, en el diagrama de flechas se observa que de cada elemento del dominio surge solo una flecha, como en el diagrama de G.



Ejemplo 4.3

Indicar cuál de las siguientes gráficas representa una función





Solución:

La gráfica A no representa a una función. Algunos valores de x están relacionados con dos valores de y. Una manera de ver si la gráfica muestra una función es trazando líneas verticales, si alguna de estas líneas atraviesa la curva en más de un punto, entonces no es una función; en cambio si no hay alguna vertical que atreviese la curva en más de un punto, entonces la gráfica corresponde a una función. En la gráfica A, si se trazan líneas verticales que atraviesen la curva se puede ver que una de estas líneas corta a la gráfica en dos puntos.

La gráfica B sí representa a una función. Si se trazan líneas verticales que atraviesen la curva se puede ver que estas líneas cortan a la gráfica en un solo punto.

Ejemplo 4.4

Decir cuáles de las siguientes relaciones son funciones.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^3$.
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$.
3. $r = \{(x, y) \mid y < x + 1\}$.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 2 - x$.

Respuesta:

1. Sí.
2. No.
3. No.
4. Sí.

5. Funciones algebraicas

Prerrequisitos

- Teoría de conjuntos; conjuntos de números, intervalos, desigualdades, producto cartesiano, relaciones, funciones.

Objetivos específicos

- Determinar el dominio y el rango de las funciones algebraicas.
- Graficar funciones algebraicas.
- Identificar el tipo de función algebraica a partir de la ecuación que la define.

En esta sección se estudian funciones cuyo dominio y rango es un subconjunto de los números reales, por lo que se llaman funciones de valores reales.

Las funciones algebraicas se obtienen al realizar las operaciones suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y composición con las funciones idéntica y constante. Las operaciones con funciones se estudiarán con más detalle en la siguiente sección.

A continuación se explicarán las características de la función idéntica y de la función constante, además de las de otras funciones algebraicas.

- La **función constante** está dada por $f(x) = c$, donde $c \in \mathbb{R}$.

Su dominio es: $\mathbb{R}$.

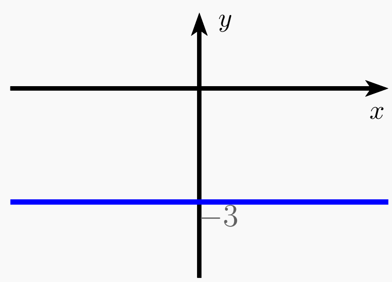
Su rango es: $\{c\}$.

Ejemplo 5.1

Dar el dominio, el rango y la gráfica de la función $f(x) = -3$.

Solución:

$f(x)$ es una función constante su dominio es $\mathbb{R}$ y su rango es {-3}.
La gráfica de $f(x)$ es

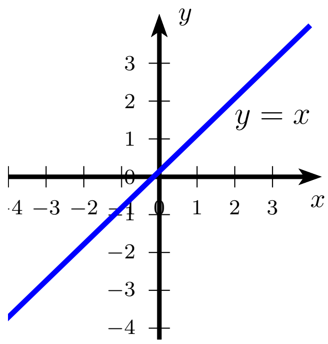


- La **función idéntica** es la función $f(x) = x$.

  Su dominio es: $\mathbb{R}$.

  Su rango es: $\mathbb{R}$.

  Su gráfica es la línea recta que pasa por el origen y forma un ángulo de 45° con los ejes:

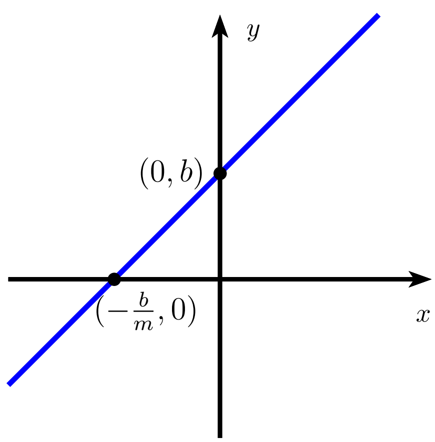


- La **función lineal** es la función $f(x) = mx + b$, donde $m, b \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$.

  Su dominio es: $\mathbb{R}$.

  Su rango es: $\mathbb{R}$.

  Su gáfica, que se muestra a continuación, es una línea recta con pendiente igual a m, ordenada al origen igual a b y abscisa al origen igual a $-\frac{b}{m}$.



Ejemplo 5.2

Dar el dominio, el rango, la ordenada al origen, la abscisa al origen y la gráfica de la función $f(x) = 3 - x$.

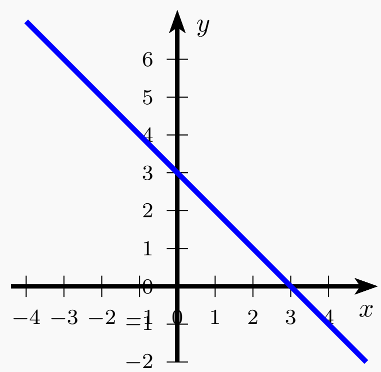
Ya que $f(x)$ es una función lineal entonces:

su dominio es $\mathbb{R}$,

su rango es $\mathbb{R}$,

la ordenada y la abscisa al origen son 3 y 3, respectivamente,

y su gráfica es



- La **función cuadrática** está descrita por una ecuación de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

  El dominio de f es $\mathbb{R}$.

  El rango de f depende del signo de a.

  Si $a > 0$ el rango es $\left[\dfrac{4ac - b^2}{4a}, \infty\right)$.

  Si $a < 0$ el rango es $\left(-\infty, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right]$.

La gráfica de la función cuadrática es una parábola que tiene como vértice el punto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

Si $a > 0$, el vértice es el punto más bajo (punto mínimo) de la gráfica, se dice que la parábola abre hacia arriba. Por eso el rango es $\left[\frac{4ac-b^2}{4a}, \infty\right)$.

Si $a < 0$, el vértice es el punto más alto (punto máximo) de la gráfica, se dice que la parábola abre hacia abajo. Por eso el rango es $\left(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$.

Ejemplo 5.3

Encontrar el dominio y el rango, además esbozar la gráfica de $f(x) = x^2 - x - 2$,

Solución:

$Dom_f = \mathbb{R}$.

Para encontrar el rango se calcula $\dfrac{4ac - b^2}{4a} = \dfrac{-9}{4}$.

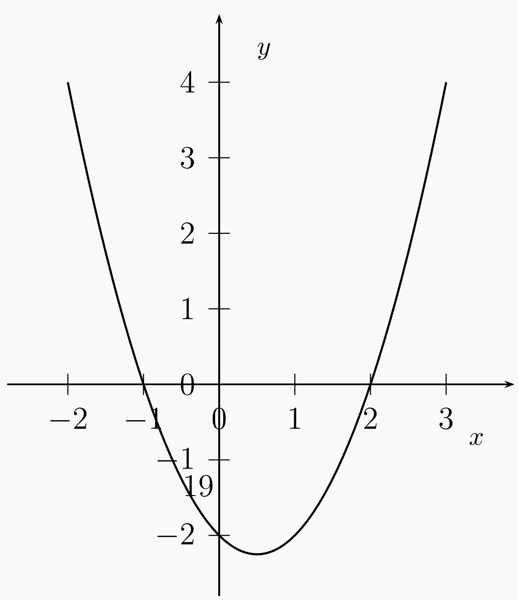
Como $a = 1 > 0$, el rango es $[-9/4, \infty)$, la parábola abre hacia arriba.

El vértice de la parábola es $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right) = (1/2, -9/4)$.

Para esbozar la gráfica de una parábola son suficientes tres puntos. Resolviendo la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$ con la fórmula general para la ecuación de segundo grado,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

se obtienen $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$, entonces se tienen los puntos $(-1, 0)$, $(2, 0)$, y el vértice (1/2,-9/4) para trazar la siguiente parábola.



Ejemplo 5.4

Encontrar el dominio, el rango, y además esbozar la gráfica de $f(x) = 2 - x^2$.

Solución:

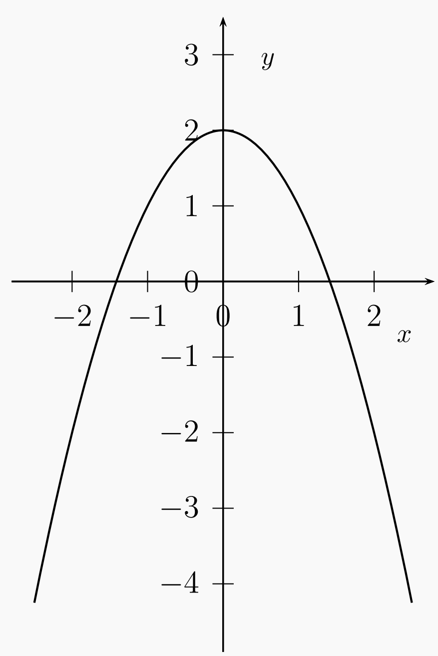
$Dom_f = \mathbb{R}$.

Para encontrar el rango se calcula $\dfrac{4ac - b^2}{4a} = 2$.

Como $a = -1 < 0$, el rango es $(-\infty, 2]$, la parábola abre hacia abajo.

El vértice de la parábola es $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right) = (0, 2)$.

Para esbozar la gráfica de una parábola son suficientes tres puntos. Resolviendo la ecuación $2 - x^2 = 0$ se obtienen las soluciones $x_1 = -\sqrt{2}$ y $x_2 = \sqrt{2}$, entonces se tienen los puntos $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$, y el vértice (0,2) para trazar la siguiente parábola.



- La **función polinomial** es una función de la forma

  $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

  donde n es un entero positivo y determina el **grado** de la función, $a_n \neq 0$ y $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son números reales.

  El dominio de las funciones polinómicas, es el conjunto de todos los números reales.

  Si n es un número impar el rango de f es $\mathbb{R}$.

  Si n es un número par y $a_n > 0$, el rango es un intervalo de la forma $[s, \infty)$.

  Si n es un número par y $a_n < 0$, el rango es un intervalo de la forma $(-\infty, s]$.

  Es evidente que las funciones constante, idéntica, lineal y cuadrática son casos particulares de la función polinomial.

  Las funciones polinómicas se estudiarán con más detalle en la Unidad 5.

Ejemplo 5.5

Encontrar el dominio, el rango y la gráfica de la función $y = x^3 - 1$.

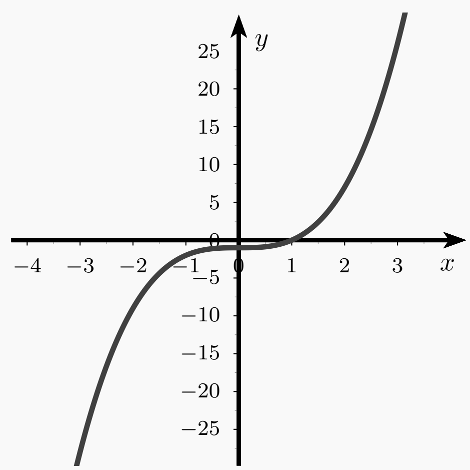
Solución:

$Dom = \mathbb{R}$.

$Rango = \mathbb{R}$, pues es una función polinómica de grado impar.

Encontrando algunos puntos se puede trazar la siguiente gráfica.

x	y
-3	-28
-2	-9
-1	-2
0	-1
1	0
2	7
3	26



- Las **funciones racionales** tienen la siguiente forma

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

donde $c \neq 0$; a, b, c y $d \in \mathbb{R}$.

El dominio de una función racional es $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{d}{c}\}$, ya que si $x = -\frac{d}{c}$ resulta una división por cero que no está definida en el conjunto de los números reales. A veces se describe el dominio de una función racional como $x \neq -\frac{d}{c}$.

El rango de una función racional es $\mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq \frac{a}{c}\}$. Para obtener el rango se despeja x de la expresión

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

de donde se obtiene

$$x = \frac{b - yd}{cy - a},$$

aquí se observa que si $y = \frac{a}{c}$ resulta una división por cero, por lo que $y \neq \frac{a}{c}$. En la gráfica de la función racional las rectas $x = -\frac{d}{c}$ y $y = \frac{a}{c}$, son las asíntotas vertical y horizontal de la función, respectivamente. La gráfica se aproxima a las asíntotas. En la gráfica las asíntotas se dibujan con líneas punteadas para señalar que no forman parte de la curva. Para trazar la gráfica de la función racional se encuentran algunos puntos dando valores a x en los intervalos $(-\infty, -\frac{d}{c})$ y $(-\frac{d}{c}, \infty)$.

Ejemplo 5.6

Encontrar el dominio, el rango y la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-5}.$$

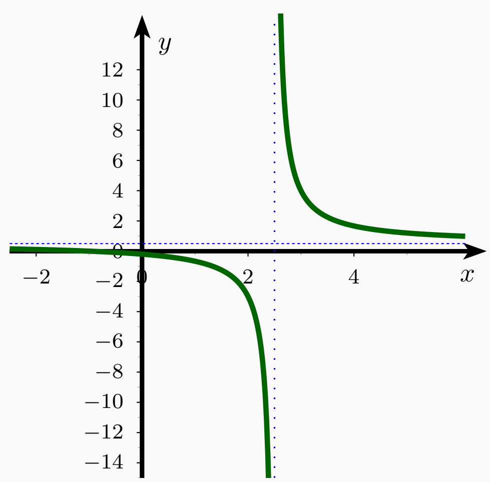
Solución:

El dominio es $\mathbb{R} - \{\frac{5}{2}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5}{2}\}$ o simplemente $x \neq \frac{5}{2}$.

El rango es $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq \frac{1}{2}\}$.

Para trazar la gráfica de la función que se muestra en la siguiente figura, primero se trazan las asíntotas vertical, $x = \frac{5}{2}$ y horizontal, $y = \frac{1}{2}$ con líneas punteadas. Una vez trazadas las asíntotas se localizan algunos puntos a la izquierda y a la derecha de la asíntota vertical. La curva se aproxima a sus asíntotas.

x	y
-1	0
0	$-\frac{1}{5}$
2	-3
3	4
4	$\frac{5}{3}$
5	$\frac{6}{5}$



6. Función valor absoluto

Prerrequisitos

- intervalos, desigualdades, funciones, funciones algebraicas.

Objetivos específicos

- Describir funciones que contengan el valor absoluto de alguna expresión algebraica determinando su descripción por partes, su dominio, su rango y su gráfica.

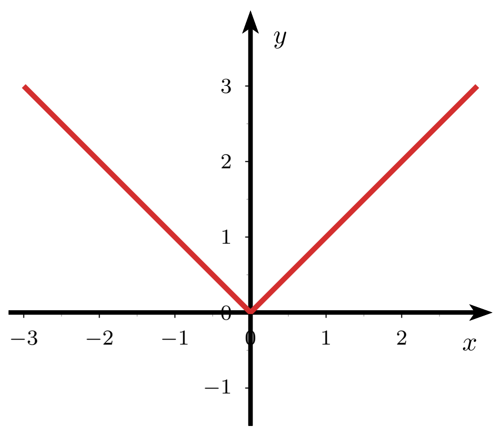
Se llama **función valor absoluto** a la función definida como:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \geq 0; \\ \\ -x, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

El dominio es: $\mathbb{R}$ ó $(-\infty, \infty)$.

Su rango es: $[0, \infty)$.

La gráfica de la función valor absoluto tiene la siguiente forma:



Si una función contiene en su descripción el valor absoluto de alguna expresión algebraica, entonces se puede eliminar este valor absoluto por medio de la segmentación de la línea recta. Esto nos da la oportunidad de definir la función por partes algebraicas.

Ejemplo 6.1

Definir por partes la función $f(x) = |x-5|$, encontrar su dominio, su rango, y trazar su gráfica.

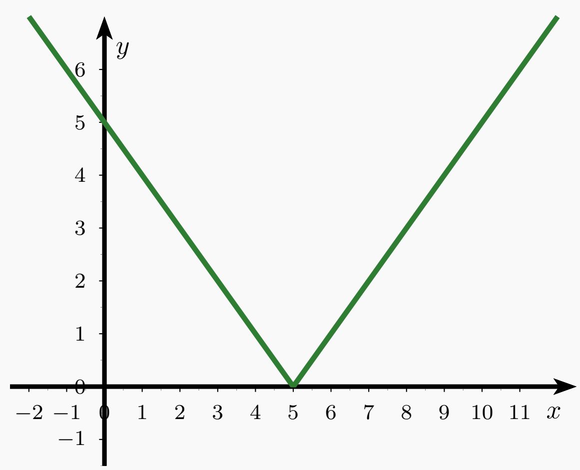
Solución:

Para definir a las funciones en valor absoluto por partes es necesario encontrar los intervalos de valores de x en los que la expresión algebraica dentro del valor absoluto es mayor o igual que cero, y aquellos en los que es menor que cero.

Resolviendo la desigualdad $x - 5 < 0$, el resultado es $x < 5$. Por lo tanto

$$f(x) = |x-5| = \begin{cases} x-5, & \text{si} \quad x \geq 5; \\ -(x-5), & \text{si} \quad x < 5. \end{cases}$$

Entonces la línea recta tiene dos segmentos $x < 5$ y $x \geq 5$, tales que en el primer segmento la función es $f(x) = -x + 5$ y en el segundo segmento $f(x) = x - 5$. Se grafica entonces la función $y = -x + 5$ solo en el segmento $(-\infty, 5)$ y después se grafica la función $y = x - 5$ en el segmento $[5, \infty)$. Estos dos trozos forman la gráfica de la función $|x - 5|$.
La gráfica es la siguiente:



El dominio es: $(-\infty, \infty)$.

El rango es: $[0, \infty)$.

Ejemplo 6.2

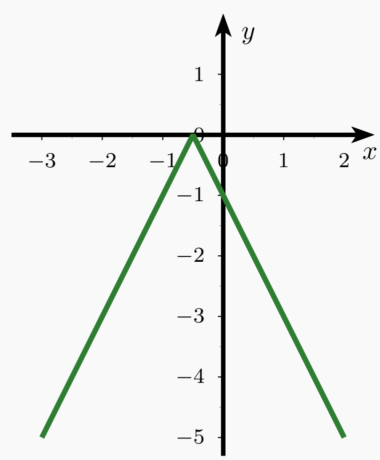
Dada la función $f(x) = -|2x+1|$, definirla por partes, dar su dominio, su rango y su gráfica.

Solución:

Resolviendo $2x-1<0$ se tiene $x < -\dfrac{1}{2}$, por lo que la función queda definida por

$$f(x) = -|2x-1| = \begin{cases} -(2x-1), & \text{si} \quad x \geq -\frac{1}{2}; \\ -(-(2x-1)), & \text{si} \quad x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

La segmentación es $\mathbb{R} = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup [-\frac{1}{2}, \infty)$. En el intervalo $(-\infty, -\frac{1}{2})$ se grafica $y = 2x-1$, y en el intervalo $(-\infty, -\frac{1}{2})$ se grafica $y = -2x+1$. Estos dos trozos forman la gráfica de la función $f(x) = -|2x+1|$:



El dominio es: $(-\infty, \infty)$.

El rango es: $(-\infty, 0]$.

Ejemplo 6.3

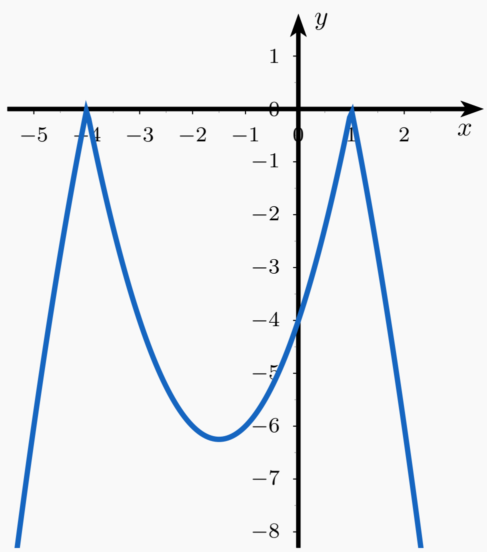
Sea $f(x) = -|x^2 + 3x - 4|$, dar su definición por partes, su dominio, su rango y su gráfica.

Solución:

Resolviendo $x^2 + 3x - 4 < 0$ se obtiene el intervalo $(-4, 1)$, por lo que la definición por partes es

$$f(x) = -|x^2 + 3x - 4| = \begin{cases} -(x^2 - 3x + 4), & \text{si} \quad x < -4 \text{ o si } x \geq 1; \\ -(-(x^2 - 3x + 4)), & \text{si} \quad -4 < x < 1. \end{cases}$$

Entonces la línea recta tiene dos segmentos $(-\infty, -4] \cup [1, \infty)$ y $(-4, 1)$. En el primer segmento la función es $y = -x^2 + 3x - 4$ y en el segundo segmento la función es $y = x^2 - 3x + 4$.



El dominio es $\mathbb{R}$.

El rango es $(-\infty, 0]$.

Ejemplo 6.4

Dada la función $f(x) = x^2 - 11|x| + 10$, dar su definición por partes, su dominio, su rango y su gráfica.

Solución:

Definida la función por partes tenemos

$$f(x) = x^2 - 11|x| + 10 = \begin{cases} x^2 - 11x + 10, & \text{si} \quad x \geq 0; \\ \\ x^2 + 11x + 10, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

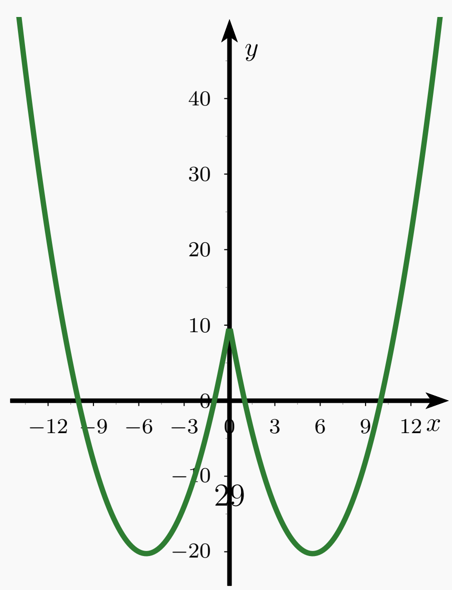
El dominio es $\mathbb{R}$.

Para $x \geq 0$ la función es $f(x) = x^2 - 11x + 10$. Su gráfica es una parábola incompleta, con vértice en el punto $(\frac{11}{2}, -\frac{81}{4})$. Las soluciones de $x^2 - 11x + 10 = 0$ son $x_1 = 1$, $x_2 = 10$.

En esta función se puede observar que $f(x) = f(-x)$, ya que $(-x)^2 = x^2$ y $|-x| = x$, entonces

$$f(-x) = (-x)^2 - 11|-x| + 10 = x^2 - 11x + 10 = f(x).$$

Para $x < 0$, la función es $x^2 + 11x + 10$. La gráfica también es una parábola incompleta con vértice en el punto $(-\frac{11}{2}, -\frac{81}{4})$, en donde las soluciones de $x^2 + 11x + 10$ son $x_1 = -1$ y $x_2 = -10$.



El rango es $[-\frac{81}{4}, \infty)$.

7. Álgebra de funciones

Prerrequisitos

- funciones, funciones algebraicas.

Objetivos específicos

- Realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de funciones.
- Determinar el dominio de las funciones que resultan de las operaciones suma, resta, multiplicación y división de funciones.
- Realizar la operación composición de funciones.
- Determinar el dominio de la función compuesta.

El álgebra de las funciones estudia las operaciones que se pueden efectuar entre funciones. Si se tienen dos funciones f y g cuyos dominios son respectivamente D_f y D_g se definen las siguientes operaciones:

suma $f + g$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

resta $f - g$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

multiplicación fg

$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$

división $\dfrac{f}{g}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

El dominio de las funciones resultantes de las operaciones suma $f + g$, resta $f - g$, y multiplicación fg es igual a la intersección del dominio de f y el dominio de g, es decir

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \cap D_g.$$

El dominio de la función división $\frac{f}{g}$ es $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$.

Ejemplo 7.1

Dadas las funciones

$$f = \{(-3,3);(-1,4);(0,2);(2,-1);(4,5)\},$$

y

$$g = \{(-2,4);(0,-1);(1,-2);(2,3);(4,3)\},$$

encontrar $f+g, f-g, fg, \dfrac{f}{g}$ y sus respectivos dominios.

Solución:

$D_f = \{-3,-1,0,2,4\}$, $D_g = \{-2,0,1,2,4\}$.

Primero encontramos la intersección de D_f y D_g para efectuar las operaciones suma, resta y multiplicación

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \cap D_g = \{0,2,4\}.$$

Entonces

$$f+g = \{(0, f(0)+g(0)); (2, f(2)+g(2)); (4, f(4)+g(4))\}$$

$$= \{(0, 2+-1); (2, -1+3); (4, 5+3)\}$$

$$= \{(0,1);(2,2);(4,8)\},$$

$$f-g = \{(0,3);(2,-4);(4,2)\},$$

$$fg = \{(0,-2);(2,-3);(4,15)\}.$$

Como en la función g no hay un par ordenado en que la segunda componente sea cero, entonces $D_{\frac{f}{g}} = \{0,2,4\}$, por lo tanto

$$\frac{f}{g} = \{(0,-2);(2,-\frac{1}{3});(4,\frac{5}{3})\}.$$

Ejemplo 7.2

Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x+2},$$

y

$$g(x) = x - 1,$$

encontrar: el dominio de las funciones f y g, adem s $f+g, f-g, fg, \dfrac{f}{g}$ y sus respectivos dominios.

Solución:

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\},$$

$$D_g = \mathbb{R},$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x+2} + x - 1 = \frac{1 + (x+2)(x-1)}{x+2} = \frac{x^2 + x - 1}{x+2},$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x+2} - (x-1) = \frac{1 - (x+2)(x-1)}{x+2} = -\frac{x^2 + x - 3}{x+2},$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{x-1}{x+2},$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x+2)(x-1)}.$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-2\}.$$

El dominio de $\frac{f}{g}$ es

$$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-2, 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2, x \neq 1\}.$$

Ejemplo 7.3

Dadas las funciones

$$f(x) = \sqrt{x+2},$$

y

$$g(x) = 2x - 3,$$

encontrar: el dominio de f y g, además $f+g, f-g, fg, \frac{f}{g}$ y sus respectivos dominios.
Solución:

Para encontrar el dominio de f se tiene que resolver la desigualdad $x+2 \geq 0$, por lo que

$$D_f = \{x \mid x \geq -2\} = [-2, \infty).$$

$$D_g = \mathbb{R},$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+2} + 2x - 3,$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x+2} - 2x + 3,$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x+2}(2x-3),$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+2}}{2x-3}.$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \cap D_g = \{x \mid x \geq -2\}.$$

El dominio de $\frac{f}{g}$ es

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2, x \neq \frac{3}{2}\} = [-2, \infty) - \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

Además de las cuatro operaciones básicas definidas en los párrafos anteriores, también se puede realizar otra operación llamada **composición de funciones**. Dadas dos funciones f y g, se define la composición $f \circ g$ como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Los pares ordenados (x, y) que conforman a $f \circ g$ son tales que x pertenece al dominio de g, pero a su vez $g(x)$ pertenece al dominio de f y $y = f(g(x))$.

Ejemplo 7.4

Sea

$$G = \{(-3,1); (0,-1); (2,0); (4,3)\}$$

y

$$F = \{(-1,3); (0,5); (3,1)\}.$$

Encontrar $F \circ G$.

Solución:

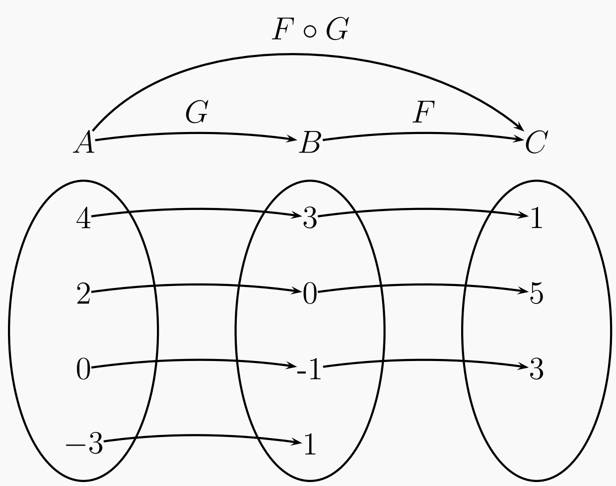
Se tiene $D_G = \{-3, 0, 2, 4\}$; rango de $G = \{1, -1, 0, 3\}$; y $D_F = \{-1, 0, 3\}$. Para encontrar el dominio de la función compuesta se toman los elementos del dominio de G cuya imagen pertenezca al dominio de F, esto es $D_{F\circ G} = \{0, 2, 4\}$. De donde

$$F(G(0)) = F(-1) = 3,$$
$$F(G(2)) = F(0) = 5,$$
$$F(G(4)) = F(3) = 1,$$

por lo tanto

$$F \circ G = \{(0,3); (2,5); (4,1)\}.$$

El siguiente diagrama sagital ilustra el procedimiento



Ejemplo 7.5

Sea $f(x) = 1 - x$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Determinar $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus respectivos dominios.

Solución:

Para obtener $(f \circ g)(x)$, en $f(x)$ se sustituye x por $g(x)$,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}.$$

El dominio de la función compuesta $f \circ g$ es

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_f\},$$

ya que $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$, rango de g es igual a $\mathbb{R} - \{0\}$ y $D_f = \mathbb{R}$, entonces

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{1\} = \{x \mid x \neq 1\}.$$

Para encontrar $(g \circ f)(x)$, en $g(x)$ se sustituye x por $f(x)$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{(1-x)-1} = -\frac{1}{x}.$$

El dominio de la función compuesta $g \circ f$ es

$$D_{g \circ f} = \{x \mid x \in D_f \text{ y } f(x) \in D_g\},$$

ya que $f(0) = 1 \notin D_g$, entonces

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{0\} = \{x \mid x \neq 0\}.$$

Ejemplo 7.6

Sea $f(x) = -x^2$ y $g(x) = \sqrt{2-x}$. Determinar $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus dominios.

Solución:

Sustituyendo $g(x)$ por x en $f(x)$ se tiene

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -(\sqrt{2-x})^2 = -(2-x) = x - 2.$$

El dominio de la función compuesta es

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_f\},$$

ya que $D_g = (-\infty, 2]$, el rango de g es igual a $[0, \infty)$ y $D_f = \mathbb{R}$,

entonces puesto que toda $g(x) \in D_f$,

$$D_{f \circ g} = (-\infty, 2].$$

Finalmente tenemos $(f \circ g)(x) = x - 2, x \leq 2$, es decir $(f \circ g)(x)$ no está definida si $x > 2$.

Sustituyendo $f(x)$ por x en $g(x)$ se tiene

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{2 - (-x^2)} = \sqrt{2 + x^2}.$$

El dominio de la función compuesta es

$$D_{g \circ f} = \{x \mid x \in D_f \text{ y } f(x) \in D_g\},$$

en donde $D_f = \mathbb{R}$, el rango de f es igual a $(-\infty, 0]$ y $D_g = (-\infty, 2]$,

entonces

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R}.$$

8. Función inversa

Prerrequisitos

- funciones, funciones algebraicas, álgebra de funciones.

Objetivos específicos

- Definir relación inversa y función inversa.
- Determinar si una función tiene función inversa.
- Obtener la inversa de una función.

Dada una relación $r = \{(x, y)\}$, la **relación inversa** de r es el conjunto $r^{-1} = \{(y, x)\}$

Ejemplo 8.1

Sea $r = \{(2, 1); (3, 2); (3, 1)\}$, entonces $r^{-1} = \{(1, 2); (2, 3); (1, 3)\}$.

Ejemplo 8.2

Sea $r = \{(x, y) \mid x < y\}$, entonces $(a, b) \in r^{-1}$ si $(b, a) \in r$, es decir $b < a$ o de manera equivalente $a > b$, por lo tanto $r^{-1} = \{(a, b) \mid a > b\}$.

Si la relación f es una función, entonces f^{-1} es una relación. Si la relación f^{-1} es también una función a f^{-1} se le llama **función inversa** de f.

Para que la inversa de una función f sea también una función, f debe de ser una función **uno a uno**, es decir debe ser una función tal que cada elemento del rango forme un par con sólo un elemento del dominio. En otras palabras, una función f es uno a uno si para toda x_1 y x_2 que pertenecen al dominio de f donde $x_1 \neq x_2$ implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$ o de forma equivalente $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$. A las funciones uno a uno se les llama funciones **inyectivas**.

Por la descripción de la función inversa se tiene que:

- Dominio de f^{-1} = Rango de f.
- Rango de f^{-1} = Dominio de f.

Otra propiedad de las funciones inversas es:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x, \text{ si } x \in \text{Rango de } f.$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \text{ si } x \in \text{Dominio de } f.$$

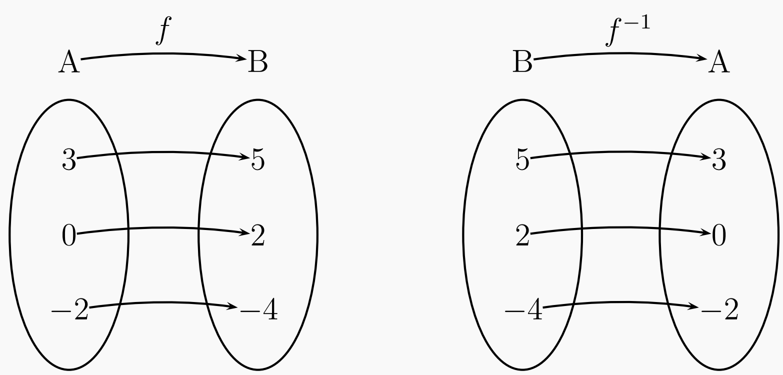
Ejemplo 8.3

Sea $f = \{(-2, -4); (0, 2); (3, 5)\}$, encontrar la relación inversa de f y decir si es una función.

Solución:

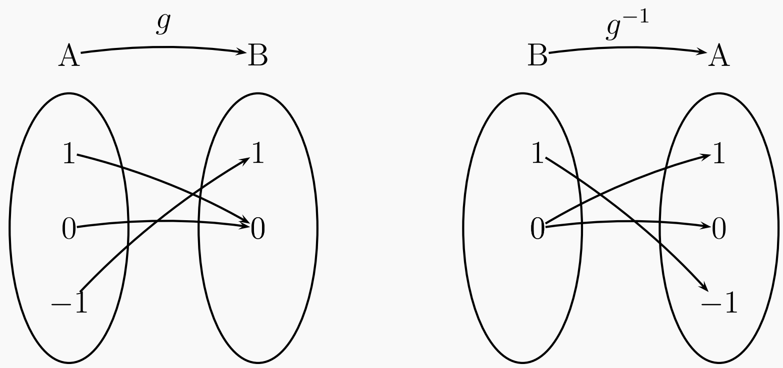
$$f^{-1} = \{(-4, -2); (2, 0); (5, 3)\}.$$

Ya que f es función inyectiva, f^{-1} también es función, como se muestra en el siguiente diagrama sagital donde se puede ver que tanto f como f^{-1} son relaciones uno a uno.



Ejemplo 8.4

Sea $g = \{(-1,1);(0,0);(1,0)\}$, entonces $g^{-1} = \{(1,-1);(0,0);(0,1)\}$.
La función g no es función inyectiva, por lo tanto g^{-1} no es función, en el siguiente diagrama sagital se puede ver que g no es una función uno a uno y que g^{-1} no es función.



Ejemplo 8.5

Obtener la función inversa de

$$f(x) = \frac{1-2x}{x-3},$$

y encontrar $(f \circ f^{-1})$ y $(f^{-1} \circ f)$.

Solución:

De dos maneras se puede probar que la función f es una función inyectiva y por lo tanto tiene función inversa. Una de ellas, es comprobar que si f es inyectiva entonces $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$. Veamos

$$\frac{1-2x_1}{x_1-3} = \frac{1-2x_2}{x_2-3},$$

multiplicando ambos lados por $x_1 - 3$ y $x_2 - 3$,

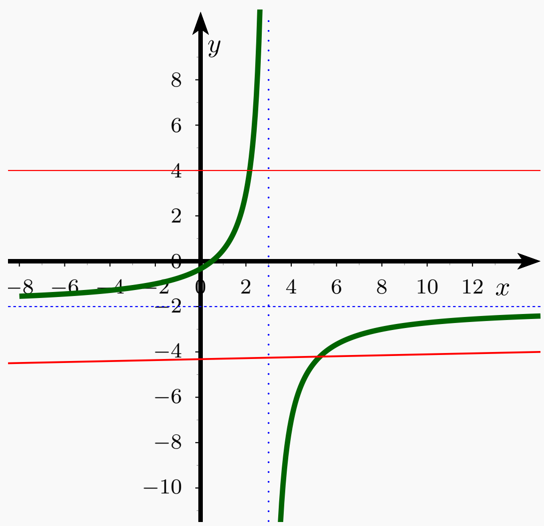
$$(x_2-3)(1-2x_1) = (x_1-3)(1-2x_2),$$

$$x_2 - 2x_1x_2 - 3 + 6x_1 = x_1 - 2x_1x_2 - 3 + 6x_2,$$

simplificando la expresión anterior con sencillos pasos algebraicos se obtiene

$$x_1 = x_2,$$

entonces $f(x) = \dfrac{1-2x}{x-3}$ es inyectiva. En general las funciones racionales son funciones inyectivas.
La otra forma es trazar rectas horizontales en la gráfica de la función. Si se encuentra alguna recta que corte la gráfica en más de un punto la función no es inyectiva. Esto se ilustra en la siguiente figura, en donde se ve que las rectas horizontales cortan la gráfica en un solo punto.



Por lo tanto la función f sí tiene función inversa. Para encontrar la función inversa se pueden seguir los siguientes pasos:

1. sustituir $f(x)$ por y en la fórmula de la función,

$$y = \frac{1-2x}{x-3},$$

2. se despeja x de donde se obtiene

$$x = \frac{1+3y}{y+2},$$

3. sustituír la variable y por la variable x, y la variable x por $f^{-1}(x)$, la respuesta es

$$f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{x+2}.$$

Las composiciones de funciones que se piden son,

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = \frac{1 - 2(\frac{1+3x}{x+2})}{\frac{1+3x}{x+2} - 3} = \frac{\frac{-5x}{x+2}}{\frac{-5}{x+2}} = x, x \neq -2;$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \frac{1 + 3(\frac{1-2x}{x-3})}{\frac{1-x}{x-3} + 2} = \frac{\frac{-5x}{x-3}}{\frac{-5}{x-3}} = x, x \neq 3.$$

Una **propiedad gráfica** de las funciones f y f^{-1} se observa cuando se dibujan las dos funciones en un mismo plano cartesiano junto con la función idéntica $g(x) = x$, en donde ésta última actúa como un espejo y las funciones f y f^{-1} son imágenes en el espejo una de la otra.

Ejemplo 8.6

Graficar $f(x) = \dfrac{1-2x}{x-3}$, su inversa $f^{-1}(x) = \dfrac{1+3x}{x+2}$, y $f(x) = x$ en el mismo plano cartesiano.

Solución:

Tanto f como f^{-1} son funciones racionales, para graficar este tipo de funciones es importante encontrar su dominio y su rango.

$$D_f = \text{Rango de } f^{-1} = \mathbb{R} - \{3\},$$

$$\text{Rango de } f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{-2\}.$$

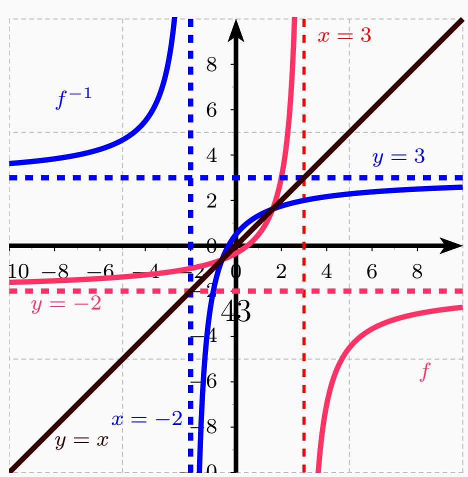
Las asíntotas de f son entonces las rectas $x = 3$ y $y = -2$; mientras que las asíntotas de f^{-1} son las rectas $x = -2$ y $y = 3$. Es importante en la gráfica trazar las asíntotas. También se deben tomar valores del dominio menores y mayores que las asíntotas verticales. Por ejemplo para graficar f considerar los puntos:

x	-9	0	2.5	3.5	6	9
$f(x)$	-1.58	-0.33	8	-12	-3.66	-2.83

y para f^{-1} los puntos:

x	-9	-5	-2.5	-1.5	3	9
$f^{-1}(x)$	3.71	4.66	13	-7	2	2.54

La gráfica resultante es la siguiente.



9. Función raíz cuadrática

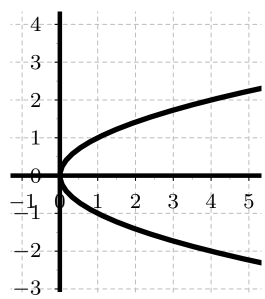
Prerrequisitos

- Funciones algebraicas, función inversa.

Objetivos específicos

- Describir a la función raíz cuadrática determinando su dominio, su rango, su función inversa y su gráfica.

Consideremos la función cuadrática $f = \{(x, y) \mid y = x^2\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, esta función no es inyectiva, pues por ejemplo los pares $(-1, 1)$ y $(1, 1)$ que pertenecen a f muestran que a dos elementos diferentes del dominio les corresponde la misma imagen. Entonces, la relación inversa $f^{-1} = \{(x, y) \mid x = y^2\}$, o de forma equivalente $f^{-1} = \{(x, y) \mid y = \pm\sqrt{x}\}$, no es una función. La figura siguiente muestra la gráfica de f^{-1} donde se ve claramente que no es una función, (para cada $a > 0$ existen dos parejas $(a, -\sqrt{a})$ y $(a, \sqrt{a}$ en la curva).



Sin embargo se puede redefinir la función f restringiendo su dominio al conjunto de números no negativos. La nueva función es

$$g = \{(x, y) \mid y = x^2\} \subset [0, \infty) \times [0, \infty).$$

De este modo la relació n inversa

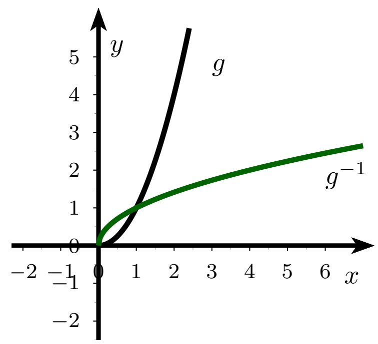
$$g^{-1} = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}\},$$

es una función para la cual

$$D_{g^{-1}} = \text{Rango de } g = [0, \infty),$$

$$\text{Rango de } g^{-1} = D_g = [0, \infty).$$

Ahora podemos graficar la función g y su inversa g^{-1} en el mismo plano cartesiano.



Con base en la discusión anterior podemos decir que una función raíz cuadrática es la función inversa de una función cuadrática con dominio restringido.

Ejemplo 9.1

Dada la función $g(x) = -\sqrt{3x-6}$, encontrar el dominio, el rango, la función inversa, el dominio y el rango de la inversa, y la gráfica de la función y la función inversa en el mismo plano cartesiano.

Solución:

Ya que no existen números reales que sean raíces cuadradas de números negativos, para encontrar el dominio se tiene que resolver la desigualdad $3x-6 \geq 0$, por lo tanto el dominio es

$$D = [2, \infty).$$

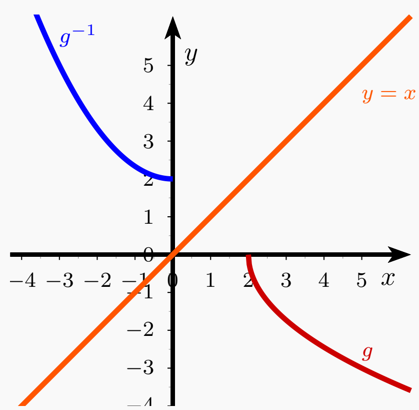
El signo negativo antes del radical nos indica que

$$\text{Rango} = (-\infty, 0].$$

Para encontrar la inversa seguimos el procedimiento descrito en el Ejemplo 33, es decir se despeja x y se sustituyen las variables x por $g^{-1}(x)$ y y por x, el resultado es

$$g^{-1}(x) = \frac{x^2+6}{3}$$

Dominio de la inversa: $(-\infty, 0]$.
Rango de la inversa: $[2, \infty)$
Gráfica:



10. Funciones exponenciales y logarítmicas

Prerrequisitos

- funciones.
- función inversa.

Objetivos específicos

- Describir las características de las funciones exponenciales.
- Aplicar las propiedades de los exponentes.
- Describir las propiedades de las funciones logarítmicas
- Aplicar las propiedades de los logaritmos.

Una función dada por una expresión de la forma

$$f(x) = a^x; \text{ donde } \ a > 0,\, a \neq 1,$$

se conoce como **función exponencial**. El dominio de una función exponencial es $\mathbb{R}$. El número a es la base de la función exponencial y puede ser cualquier número real positivo diferente de 1 (si $a = 1$, entonces $a^x = 1$ es una constante).

Si $x = n$ es un entero positivo, entonces por la definición

$$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}},$$

pero si $x = -n$ es un entero negativo, entonces

$$a^x = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}}_{n \text{ veces}}.$$

Si $x = \frac{p}{q}$ es un número racional, entonces a^x se define como $\sqrt[q]{a^p}$. En este caso el valor a^x no depende de la representación particular de x como fracción racional: las igualdades $x = \frac{p}{q}$, $x = \frac{m}{k}$ implican $pk = mq$ y por lo tanto

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[qm]{a^{pm}} = \sqrt[k]{a^m}.$$

Si x es un número irracional (una fracción decimal infinita no periódica)

$$x = A.a_0a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$$

entonces x es un límite de los números racionales

$$x_1 = A;\ x_2 = A.a_0;\ x_3 = A.a_0a_1;\ \dots$$

En este caso el valor a^x se define como el límite de la sucesión

$$a^{x_1},\ a^{x_2},\ a^{x_3},\ \dots$$

El concepto de límite se estudia en los cursos de cálculo, donde se puede demostrar que si x es el límite de otra sucesión de los números racionales

$$x_1',\ x_2', x_3',\ \dots$$

entonces el límite de la sucesión

$$a^{x_1'},\ a^{x_2'},\ a^{x_3'},\ \dots$$

es igual al límite de la sucesión anterior

$$a^{x_1},\ a^{x_2},\ a^{x_3},\ \dots$$

De esta manera el valor a^x se define correctamente para cualquier número real x. Es decir, el **dominio** de la función exponencial es $\mathbb{R}$.
El **rango** de la función exponencial es el conjunto de todos los números reales no negativos $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

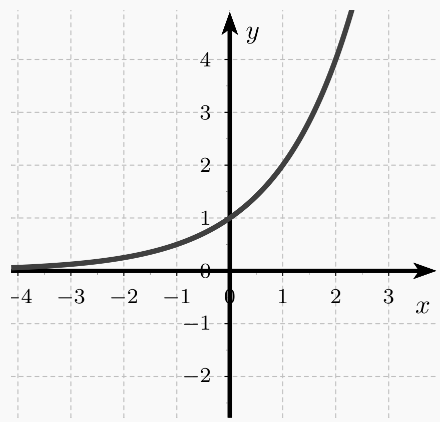
Ejemplo 10.1

Obtener el dominio, la gráfica y el rango de la función exponencial $f(x) = 2^x$.

Procedimiento:

El dominio es $D_f = \mathbb{R}$.
Para trazar la gráfica se tabulan algunos puntos como se muestra a continuación.

x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



El rango de la función es el conjunto de los números reales positivos, es decir $\mathbb{R}^+$, como se puede observar en la gráfica.

Ejemplo 10.2

Obtener el dominio, la gráfica y el rango de la función exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

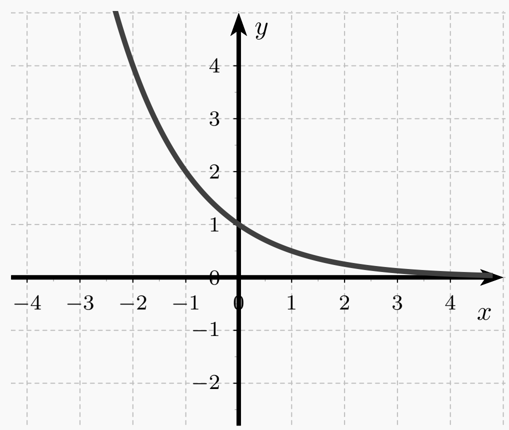
Solución:

El dominio es $D_f = \mathbb{R}$.

El rango de la función es $\mathbb{R}^+$.

Se tabulan algunos puntos y se traza la gráfica.

x	y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



En los ejemplos anteriores se pueden observar las siguientes propiedades de las funciones exponenciales:

- Si $a > 1$, la función es creciente, es decir se cumple la condición

$$x_1 < x_2 \text{ implica que } a^{x_1} < a^{x_2}.$$

- Si $0 < a < 1$, la función es decreciente, es decir se cumple la condición

$$x_1 < x_2 \text{ implica que } a^{x_1} > a^{x_2}.$$

- Si $a = 1$ entonces $a^x = 1$ para toda x es una función constante.

La **función logarítmica** descrita como

$$f(x) = \log_a x,$$

es la función inversa de la función exponencial. La expresión se lee como el logarítmo base a de x.

El **dominio** de la función logarítmica es igual al rango de la función exponencial:

$$D_{\log_a} = \mathbb{R}^+.$$

El **rango** de la función logarítmica es igual al dominio de la función exponencial:

$$Rango_{\log_a} = \mathbb{R}.$$

El número $\log_a x$ representa el exponente al que se debe de elevar la base a para obtener el número x.

Toda expresión exponencial se puede reescribir como expresión logarítmica, y viceversa.

Ejemplo 10.3

En la siguiente tabla se ejemplifica la correspondencia entre expresión exponencial y logarítmica.

Expresión exponencial	*Expresión logarítmica*
$2^2 = 4$	$\log_2 4 = 2$
$10^3 = 1000$	$\log_{10} 1000 = 3$
$7^{-2} = \frac{1}{49}$	$\log_7 \frac{1}{49} = -2$
$y = e^x$	$\ln y = x$

Ejemplo 10.4

Obtener el dominio, el rango y la gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_2 x$.

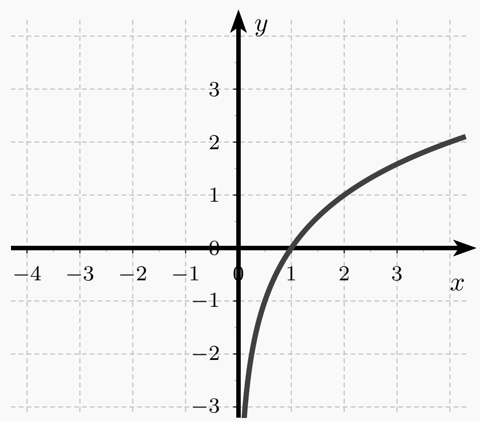
Procedimiento:

El dominio es $D_f = \mathbb{R}^+$.

El rango es $\mathbb{R}$.

Se tabulan algunos puntos y se traza la gráfica.

x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



En la siguiente tabla se presentan las propiedades de exponentes y logaritmos.

Propiedades de exponentes	*Propiedades de logaritmos*
$a^0 = 1$	$\log_a xy = \log_a x + \log_a y,\ x > 0,\ y > 0.$
$a^1 = a$	$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,\ x > 0,\ y > 0.$
$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x,\ x > 0$
$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p},$ si $p, q \in \mathbb{N}, q > 0$	$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x,\ x > 0.$
$a^x a^y = a^{x+y}$	$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a},\ x > 0.$
$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	
$(a^x)^y = a^{xy}$	
$(ab)^x = a^x b^x$	

A continuación presentamos algunos ejemplos útiles de aplicación de las propiedades de exponentes y logaritmos.

Ejemplo 10.5

Resuelve la ecuación

$$\log_{10} x^2 - \log_{10} x = -1.$$

Solución:

aplicando la propiedad de la diferencia de logaritmos se tiene

$$\log_{10} x^2 - \log_{10} x = \log_{10} \frac{x^2}{x} = -1.$$

Simplificando

$$\log_{10} x = -1.$$

Escribiendo en forma exponencial

$$x = 10^{-1}.$$

Respuesta: $x = 0.1$.

Ejemplo 10.6

Resuelve la siguiente ecuación

$$x + \log_4 16 = 2 \log_4 2.$$

Solución:

aplicando las propiedades de logaritmos se tiene

$$x = \log_4 2^2 - \log_4 16 = \log_4 \frac{4}{16} = \log_4 \frac{1}{4}.$$

Escribiendo en forma exponencial

$$4^x = \frac{1}{4},$$

por lo tanto $x = -1$.

Ejemplo 10.7

Resuelve la ecuación

$$\log_3(x^2-1)-3=\log_3(x+1).$$

Solución:

restando a ambos lados $\log_3(x+1)$ y sumando a ambos lados 3 obtenemos

$$\log_3(x^2-1)-\log_3(x+1)=3.$$

Aplicando la propiedad de la diferencia de logaritmos

$$\log_3\frac{x^2-1}{x+1}=3.$$

Simplificando

$$\log_3\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}=\log_3(x-1)=3.$$

Escribiendo en forma exponencial

$$3^3=x-1,$$

por lo tanto $x=28$.

Ejemplo 10.8

Resuelve la ecuación

$$2^{3x-1} = 32.$$

Solución:

Escribiendo en forma logarítmica

$$\log_2 32 = 3x - 1.$$

Sumando 1 a ambos lados

$$\log_2 32 + 1 = 3x,$$

dividiendo ambos lados entre 3

$$\frac{\log_2 32 + 1}{3} = x.$$

Ya que $\log_2 32 = 5$, entonces

$x = 2$

Ejemplo 10.9

Resuelve la ecuación

$$5^{x+2} = 3^{2x-1}.$$

Solución:

aplicando logaritmo natural a ambos lados de la ecuación

$$\ln(5^{x+2}) = \ln(3^{2x-1}).$$

Utilizando la propiedad $\log_a x^n = n \log_a x$:

$$(x+2)\ln 5 = (2x-1)\ln 3.$$

Dividiendo ambos lados por $\ln 5$

$$(x+2) = (2x-1)\frac{\ln 3}{\ln 5} = 0.6826(2x-1) = 1.3652x - 0.6826.$$

Restando -2 y $1.3652x$ a ambos lados

$$x - 1.3652x = -0.6826 - 2,$$

$$0.3652x = -2.6826,$$

$$x = \frac{-2.6826}{0.3652} = -7.3453.$$