NOTAS DE INTERVALOS Y DESIGUALDADES

Alma Virginia Lara Sagahón, Vladislav Khartchenko, Antonio Trejo Lugo,
Angélica Espinosa Godínez, José Luis Garza Rivera

Índice

1. Introducción

Una forma de describir los subconjuntos de números reales es por medio de intervalos. La forma gráfica de los intervalos permite realizar de manera sencilla las operaciones de unión y de intersección de estos subconjuntos. La representación por intervalos es ampliamente utilizada en las matemáticas de números reales. Uno de estos usos es en la solución de desigualdades que se verá más adelante en este capítulo.

Objetivo general

- Representar subconjuntos de números reales en forma de intervalo y resolver desigualdades.

2. Intervalos

Prerrequisitos

- Teoría de conjuntos, conjunto de números reales.

Objetivos específicos

- Describir subconjuntos de números reales en la forma de: intervalo, desigualdad, y gráfica.
- Realizar las operaciones de unión y de intersección de subconjuntos de números reales.

La notación en forma de intervalo describe a los subconjuntos de números reales comprendidos entre dos números fijos a y b, se tienen los siguientes tipos:

Intervalo abierto (a, b), sus elementos son los números comprendidos entre a y b. Los números mismos a y b no pertenecen al intervalo.

Intervalo cerrado $[a, b]$, sus elementos son los números a, b y los números comprendidos entre a y b.

Intervalo semiabierto por la izquierda (o semicerrado por la derecha) $(a, b]$, sus elementos son el número b y los números comprendidos entre a y b.

Intervalo semicerrado por la izquierda (o semiabierto por la derecha) $[a, b)$, sus elementos son el número a y los números comprendidos entre a y b.

Intervalos infinitos, tienen la forma $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$ y $(-\infty, \infty)$.

Hay tres formas para describir los subconjuntos de números reales. La forma de intervalo es la que se mostró en los párrafos anteriores. Otra manera es utilizando los símbolos de las desigualdades: $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$; que significan menor, mayor, menor o igual, y mayor o igual que, respectivamente. La tercera es la forma gráfica de los intervalos. En geometría los intervalos abiertos, cerrados o semiabiertos se llaman segmentos y los intervalos infinitos se conocen como semirrectas. En los segmentos se utiliza un punto lleno para indicar el extremo cerrado del intervalo y un punto vacío para el abierto. En la Tabla 1 se muestra la correspondencia entre estas tres formas.

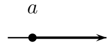
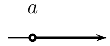
Tipo de intervalo	*Notación de desigualdad*	*Notación de intervalo*	*Gráfica*
abierto	$a < x < b$	(a, b)	a b
cerrado	$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	a b
Semiabierto por la izquierda	$a < x \leq b$	$(a, b]$	a b
Semiabierto por la derecha	$a \leq x < b$	$[a, b)$	a b
Infinito cerrado por la derecha	$x \leq b$	$(-\infty, b]$	b
Infinito abierto por la derecha	$x < b$	$(-\infty, b)$	b
Infinito cerrado por la izquierda	$x \geq a$	$[a, \infty)$	a 
Infinito abierto por la izquierda	$x > a$	(a, ∞)	a 

Tabla 1. Formas para describir subconjuntos de números reales

3. Desigualdades

Prerrequisitos

- Teoría de conjuntos, conjunto de números reales.

Objetivo específico

- Describir las propiedades de las desigualdades.

Las desigualdades expresan que una cantidad es mayor que otra o menor. Se llaman desigualdades estrictas cuando se utilizan los símbolos $<$ (menor que) o $>$ (mayor que), y desigualdades no estrictas cuando los símbolos utilizados son $\leq$ (menor o igual que) y $\geq$ (mayor o igual que).

Las desigualdades tienen las siguientes propiedades:

1. El sentido de la desigualdad no se altera si se suma o se resta un mismo número en ambos lados de la desigualdad.
2. El sentido de la desigualdad no se altera si ambos lados de la desigualdad se multiplican o dividen por un número positivo.
3. El sentido de la desigualdad se invierte si se multiplican o dividen ambos lados por un número negativo.

De estas propiedades se muestran ejemplos en la tabla 2.

$9 > 5$		
Propiedad 1	*Propiedad 2*	*Propiedad 3*
$9+3>5+3$ $11>8$	$9*3>5*3$ $27>15$	$-2*9<-2*5$ $-18<-10$

Tabla 2. Ejemplos de las propiedades de las desigualdades

4. Desigualdades lineales

Prerrequisitos

- Teoría de conjuntos, conjunto de números reales, intervalos.

Objetivo específico

- Resolver desigualdades lineales.

Una desigualdad (o inecuación) lineal se resuelve de la misma forma que una ecuación lineal. Se utilizan las propiedades antes descritas, teniendo especial cuidado en la propiedad que indica que si ambos lados de la desigualdad se multiplican o dividen por un número negativo se invierte el sentido de la desigualdad.

Ejemplo 4.1

Resolver $\dfrac{x-5}{3} < \dfrac{6+x}{2}$.

La desigualdad se resuelve mediante el procedimiento siguiente.

- Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los numeradores que es 6. Tal que 6 es un número positivo, el sentido de la desigualdad no se cambia.

$$\frac{6(x-5)}{3} < \frac{6(6+x)}{2},$$

- simplificando,

$$2x - 10 < 18 + 3x,$$

- se resta $3x$ de cada lado,

$$2x - 3x - 10 < 18 + 3x - 3x,$$

$$-x - 10 < 18,$$

- se suma 10 de cada lado,

$$-x - 10 + 10 < 18 + 10,$$

$$-x < 28,$$

- se multiplican ambos lados por -1 y se invierte el sentido de la desigualdad,

$$(-1)(-x) > (-1)(28),$$

- la solución es $x > -28$ o en forma de intervalo $(-28, \infty)$.

  Respuesta: $(-28, \infty)$

5. Método de la serpiente para resolver desigualdades

Prerrequisitos

- Teoría de conjuntos, conjunto de números reales, intervalos.

Objetivos específicos

- Resolver desigualdades no lineales utilizando el método de la serpiente.

El siguiente algoritmo que hemos llamado “método de la serpiente” se puede usar para resolver desigualdades de la forma

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_m)} \geq 0,$$

o con cualquiera de los otros símbolos de las desigualdades ($>$, $<$, o $\leq$). Este algoritmo es una síntesis y una simplificación de los métodos siguientes: de los intervalos, de multiplicación de signos, gráfico, y del método por casos.

El algoritmo consiste en dibujar la recta numérica en donde se marcan todos los números a_1, a_2, . . . , a_n, b_1, b_2, . . . , b_m (ver Figura 1). Se puede observar que si se toma un número x mayor que todos estos números, entonces todos los factores $(x - a_i)$ y $(x - b_j)$ son positivos. Por lo tanto la expresión del lado izquierdo es positiva.

Cuando x disminuye tanto que es menor al punto máximo marcado en la recta, entonces un factor cambia de signo, mientras que los otros conservan su signo positivo. Ahora la expresión del lado izquierdo es negativa. Esto se dibuja en la gráfica como una curva que inicia arriba a la derecha de la recta (cola de la serpiente) y la atraviesa en el punto máximo marcado.

Al continuar con este procedimiento se pueden marcar los intervalos donde la expresión del lado izquierdo es positiva negativa o cero. La gráfica de la figura 1 que simula una serpiente ilustra el procedimiento descrito.

En los puntos b_1, b_2, $\dots$, b_m la expresión no está definida, por esta razón se marcan con puntos blancos (estos valores de x nunca cumplen la desigualdad).

Si la desigualdad dada es estricta ($<$, o $>$), entonces ninguno de los valores $a_1, a_2, \dots, a_n$ es solución de la desigualdad, por esta razón los valores a_1, a_2, . . . , a_n se marcan como puntos blancos únicamente en el caso de las desigualdades estrictas ($<$, o $>$).

Método de la serpiente

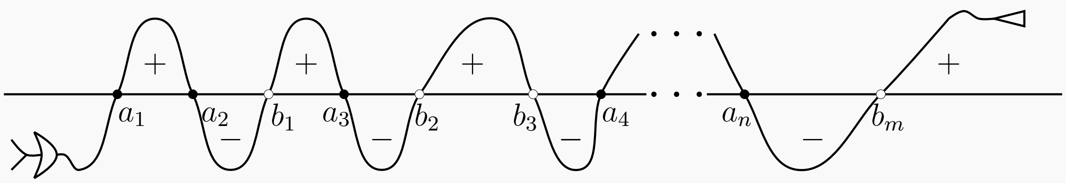


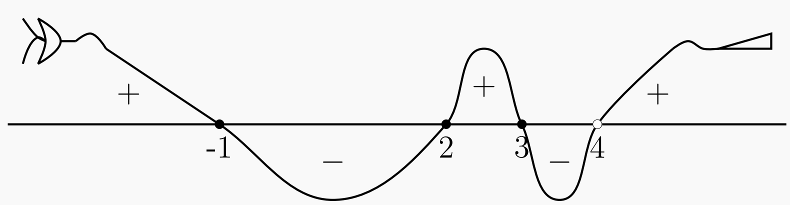
Figura 1

Ejemplo 5.1

Resolver la desigualdad

$$\frac{(x-2)(x+1)(x-3)}{x-4} \leq 0.$$

Solución: aquí los valores que llamaremos críticos son $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, tal que $x + 1 = x - (-1)$, $a_3 = 3$, y $b_1 = 4$. Usando el método de la serpiente:



Se observa que la serpiente está debajo de la línea, en el lado negativo, cuando $x \in [-1, 2]$ y cuando $x \in [3, 4)$.
La respuesta es: $x \in [-1, 2] \cup [3, 4)$

Ejemplo 5.2

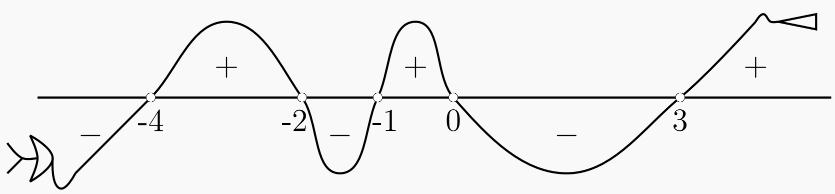
Resolver la desigualdad

$$\frac{x(x+1)(x+2)}{(x-3)(x+4)} > 0.$$

Solución: para trazar la serpiente se obtienen los valores críticos como sigue:

- $x = x - 0$, entonces $a_1 = 0$;
- $x + 1 = x - (-1)$ entonces $a_2 = -1$;
- $x + 2 = x - (-2)$ entonces $a_3 = -2$;
- de $x - 3$ se tiene $b_1 = 3$;
- $x + 4 = x - (-4)$ entonces $b_2 = -4$.

Ya que la desigualdad es estricta, todos los puntos marcados en la serpiente son blancos.



Se puede ver que la serpiente está por arriba de la línea, en el lado positivo, si $x \in (-4, 2)$ o $x \in (-1, 0)$ o $x \in (3, \infty)$.
La respuesta es $(-4, -2) \cup (-1, 0) \cup (3, \infty)$

Ejemplo 5.3

Resolver la desigualdad

$$\frac{(2x+1)(3x-4)}{(x-1)(2x-3)} \geq 0.$$

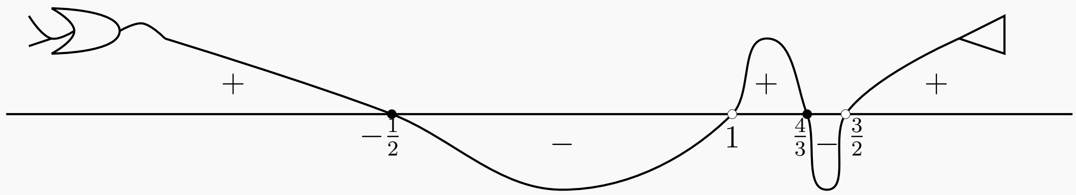
Solución: en este ejemplo se ve que la parte izquierda de la expresión no tiene la forma adecuada para usar el método de la serpiente, porque algunos coeficientes son diferentes de uno. Sin embargo, se puede factorizar de la siguiente manera

$$\frac{2(x+\frac{1}{2})3(x-\frac{4}{3})}{(x-1)2(x-\frac{3}{2})} \geq 0,$$

dividiendo ambos lados por 3 resulta

$$\frac{(x+\frac{1}{2})(x-\frac{4}{3})}{(x-1)(x-\frac{3}{2})} \geq 0.$$

De esta forma ya se puede aplicar el método de la serpiente. Los valores críticos son $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{4}{3}$, $x = 1$ y $x = \frac{3}{2}$.



La respuesta es $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (1, \frac{4}{3}] \cup (\frac{3}{2}, \infty)$

Ejemplo 5.4

Resolver la desigualdad

$$\frac{x+2}{x-1} \geq \frac{x+1}{x-2}.$$

Solución: para poder aplicar la serpiente el lado derecho de la expresión debe ser cero. Entonces

$$\frac{x+2}{x-1} - \frac{x+1}{x-2} \geq 0,$$

que es equivalente a

$$\frac{(x+2)(x-2)-(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} \geq 0;$$

realizando operaciones en el numerador

$$\frac{x^2-4-(x^2-1)}{(x-1)(x-2)} \geq 0,$$

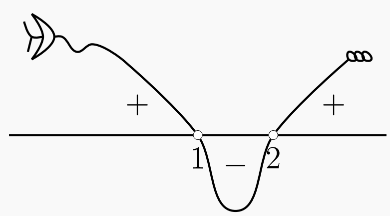
simplificando se llega a

$$\frac{-3}{(x-1)(x-2)} \geq 0.$$

Al dividir ambos lados de la expresión por -3 se cambia el sentido de la desigualdad para obtener

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} \leq 0.$$

Ahora ya se puede aplicar la serpiente



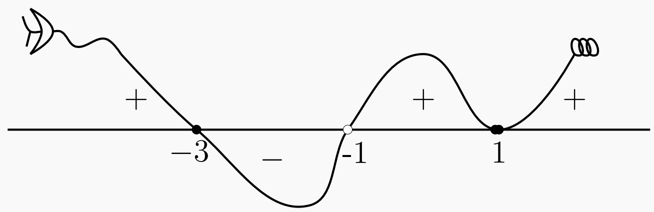
La respuesta es $(1,2)$

Ejemplo 5.5

Resolver la desigualdad

$$\frac{(x-1)^2(x+3)}{x+1} \geq 0.$$

Solución: En esta desigualdad $x=1$ es un punto crítico doble por el exponente 2 del factor $(x-1)$. En $x=1$ la serpiente toca la línea e inmediatamente sube, es decir Ábrinca! como se muestra en la siguiente gráfica.



La respuesta es $(-\infty, -3] \cup (-1, \infty)$

6. Desigualdades cuadráticas

Prerrequisitos

- Teoría de conjuntos, conjunto de números reales, intervalos, ecuaciones cuadráticas.

Objetivo específico

- Resolver desigualdades cuadráticas.

Las desigualdades cuadráticas son de la forma

$$ax^2 + bx + c < 0,$$

que también pueden tener cualquiera de los otros símbolos de las desigualdades ($\leq$, $>$, o $\geq$).

El método de la serpiente descrito en la sección anterior, se puede aplicar para resolver las desigualdades cuadráticas, pues basta recordar que una ecuación cuadrática se puede expresar en forma factorizada conociendo sus soluciones.

La forma factorizada del polinomio cuadrático es

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

donde los valores x_1 y x_2 se obtienen al resolver

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

utilizando la conocida fórmula general para la solución de la ecuación de segundo grado dada por

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ejemplo 6.1

Resolver

$$3x^2 + 2x - 1 \leq 0.$$

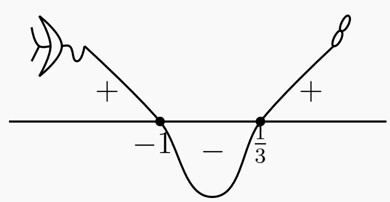
Por la fórmula general se obtiene $x_1 = -1$ y $x_2 = \frac{1}{3}$, entonces

$$3x^2 + 2x - 1 = 3(x - \frac{1}{3})(x + 1) \leq 0,$$

dividiendo ambos lados por el número positivo 3, se tiene

$$(x - \frac{1}{3})(x + 1) \leq 0.$$

Ahora se dibuja la serpiente



La respuesta es $x \in [-1, \frac{1}{3}]$

Ejemplo 6.2

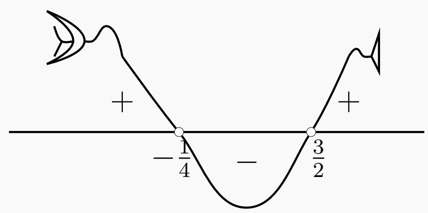
Resolver $8x^2 - 10x - 3 > 0$.
Por la fórmula general se obtiene $x_1 = \frac{3}{2}$ y $x_2 = -\frac{1}{4}$, entonces

$$8x^2 - 10x - 3 = 8(x + \frac{1}{4})(x - \frac{3}{2}) > 0,$$

dividiendo ambos lados por el número positivo 8, resulta

$$(x + \frac{1}{4})(x - \frac{3}{2}) > 0.$$

El dibujo de la serpiente es



La respuesta es $(-\infty, -\frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$

Ejemplo 6.3

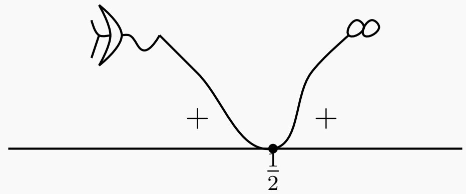
Resolver $-4x^2 + 4x - 1 \geq 0$.
Por la fórmula general se obtiene $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, entonces

$$-4x^2 + 4x - 1 = -4(x - \frac{1}{2})^2 \geq 0,$$

dividiendo ambos lados por el número negativo -4, se tiene

$$(x - \frac{1}{2})^2 \leq 0.$$

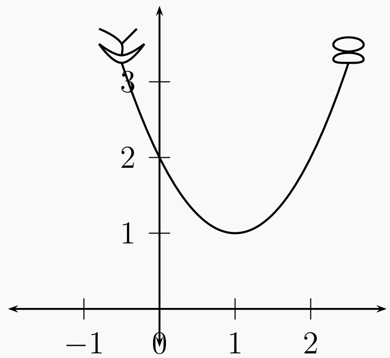
La serpiente en este caso toca la recta pero no la atraviesa:



Tal que la desigualdad no es estricta, la solución es $x = \frac{1}{2}$, el cual es el punto donde la serpiente toca la recta.
La respuesta es $x = \frac{1}{2}$

Ejemplo 6.4

Resolver $x^2 - 2x + 2 \geq 0$
La ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$ no tiene soluciún en el conjunto de números reales, esto porque al aplicar la fórmula general se obtiene la raíz cuadrada de un número negativo. Por lo tanto no se puede factorizar para aplicar el método de la serpiente.
Si $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene solución en el conjunto de los números reales y $a > 0$, entonces la gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola que se abre hacia arriba y no tiene intersección con el eje x, es decir se cumple $ax^2 + bx + c > 0$ para toda $x \in (-\infty, \infty)$.
En este ejemplo $a = 1 > 0$. La siguiente es la serpentina gráfica de $y = x^2 - 2x + 2$:



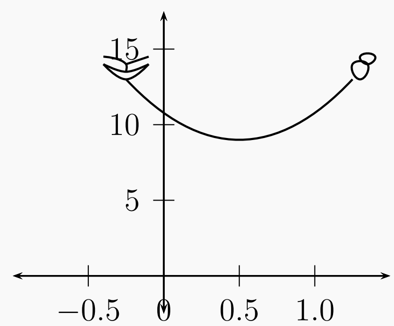
La respuesta es $(-\infty, \infty)$

Ejemplo 6.5

Resolver $-4x^2 + 4x - 10 \geq 0$
La ecuación $-4x^2+4x-10 = 0$ no tiene solución en el conjunto de los números reales, esto porque al aplicar la fórmula general se obtiene la raíz cuadrada de un número negativo. Por lo tanto no se tienen números reales para marcar en la recta numérica y aplicar la serpiente, al igual que en el ejemplo anterior.
Si se multiplican ambos lados de la desigualdad por el número negativo -1 se invierte el sentido de la desigualdad quedando

$$4x^2 - 4x + 10 \leq 0,$$

ya que $a = 4 > 0$, entonces $4x^2-4x+10$ es una parábola que abre hacia arriba y no cruza el eje X. La serpiente flota por encima del eje X:



La respuesta es $\emptyset$