Conjuntos

Alma Virginia Lara Sagahón, Vladislav Khartchenko, Antonio Trejo Lugo,
Angélica Espinosa Godínez, José Luis Garza Rivera

Índice

1. Introdución

La teoría de conjuntos propuesta por George Cantor (1845-1918) sentó las bases de la matemática moderna, es por esto que los cursos de matemáticas inician con los conceptos fundamentales de esta teoría que han permitido el desarrollo de nuevos conceptos.

Objetivo general

- Comprender los conceptos fundamentales de la Teoría de Conjuntos y aplicarlos para resolver ejercicios.

2. Conceptos Básicos

Prerrequisitos

- Ninguno

Objetivos específicos

- Describir conjuntos por extensión y por comprensión
- Utilizar los símbolos matemáticos de la Teoría de Conjuntos
- Determinar las relaciones entre conjuntos
- Distinguir conjuntos finitos e infinitos
- Identificar los conjuntos de números
- Describir un conjunto booleano y calcular el número de sus elementos

2.1. Noción y descripción

En las matemáticas a los conceptos que se conocen intuitivamente y no pueden definirse se les llama primitivos. Un conjunto y sus elementos son conceptos primitivos porque intuitivamente los podemos imaginar. Otros conceptos primitivos con los que estamos familiarizados son los conceptos geométricos de línea y punto.

Un conjunto se debe describir algebraicamente de modo que se pueda saber sin ambigüedad si un objeto pertenece o no al mismo. La descripción de un conjunto se hace especificando sus elementos en cualquiera de las siguientes dos formas:

1) Por extensión, se escribe una lista con los elementos del conjunto separados por comas. Se debe tomar en cuenta que ningún elemento del conjunto se repita. El orden en que se escriben los elementos no es importante.

2) Por comprensión, se describen las características que tienen en común los elementos del conjunto.

En ambas formas los elementos se escriben entre llaves.

Ejemplo 2.1

Descripción por extensión	Descripción por comprensión
$A = \{Li, Na, K, Rb, Cs, Fr\}$	$A = \{x \mid x \text{ es un metal alcalino}\}$
$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$	$B = \{x \mid x \text{ es un dígito impar}\}$
$C = \{a, l, m\}$	$C = \{x \mid x \text{ es una letra de la palabra “alma”}\}$
$A = \{3, 6, 9, 12\}$	$A = \{x \mid x \text{ es múltiplo de 3 y } x \text{ es menor que } 13\}$

La descripción de un conjunto establece una relación de pertenencia, el elemento a pertenece al conjunto A si y solo si satisface su descripción. Se utiliza el símbolo $\in$ para expresar pertenencia y el símbolo $\notin$ para negar la pertenencia.

2.2. Conjuntos especiales

Conjunto vacío, no contiene elementos, se denota con el símbolo $\emptyset$ o también como $\{\ \}$.

Conjunto universo, contiene a todos los elementos en discusión, sus símbolos son U o Ω. El conjunto universo se define en cada situación.

Conjunto complemento, si A es un conjunto cualesquiera el conjunto complemento de A es el conjunto que contiene los elementos que pertenecen al universo pero que no pertenecen al conjunto A. Los símbolos del complemento de A son A' o A^c. La expresión simbólica es

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}.$$

Ejemplo 2.2

Sean los conjuntos
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y
$B = \{5, 6, 7\}$.
Entonces
$A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y
$B^c = \{1, 2, 3, 4, 8, 9, 10\}$

Conjunto unitario, es un conjunto que contiene solo un elemento. Por ejemplo $A = \{0\}$.

2.3. Tipos de conjuntos

Los conjuntos se clasifican en finitos o infinitos. Si el número de elementos de un conjunto es contable y tiene un fin se dice que el conjunto es finito. Por el contrario, un conjunto es infinito si no es posible contar el número de sus elementos, es decir siempre es posible contar un elemento más.

Ejemplo de conjunto finito: $A = \{a, l, m\}$.

Ejemplo de conjunto infinito: $P = \{n|n \text{ es un número entero mayor que } 7\}$.

2.4. Relaciones entre conjuntos

Subconjunto. El conjunto A es un subconjunto del conjunto B, si cada elemento de A pertenece a B, esto se representa en símbolos como

$$A \subseteq B \text{ si y solo si } (x \in A \text{ implica } x \in B).$$

Igualdad de conjuntos. Dos conjuntos son iguales si contienen exactamente los mismos elementos. Se puede decir que si A es subconjunto de B y B es subconjunto de A, entonces A y B son iguales. En símbolos

$$A = B \text{ si y solo si } (x \in A \text{ si y solo si } x \in B);$$

o de otra manera

$$A = B \text{ si y solo si } (A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A).$$

Subconjunto propio. Si A es un subconjunto de B, pero B contiene elementos que no están en A, entonces se dice que A es un subconjunto propio de B, su símbolo es $A \subset B$. Es decir, A es subconjunto propio de B si A es subconjunto de B y existe $b \in B$ tal que $b \notin A$. También se puede expresar como

$$A \subset B \text{ si y sólo si } (A \subseteq B \text{ y } A \neq B).$$

Inclusión. El concepto de subconjunto constituye una relación de inclusión entre conjuntos. Si $A \subset B$ entonces A está incluido (o contenido) en B, y la inclusión es propia. Si $A = B$, entonces $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, y la inclusión es impropia.

Ejemplo 2.3

Dados los conjuntos $A = \{5, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{5, 7, 9\}$ y $D = \{9, 5, 7\}$ se pueden establecer las siguientes relaciones

- $A \subset B$
- $A \subset C$
- $B \not\subset C$
- $C \subset B$
- $C \subseteq D$
- $C = D$

2.5. Conjunto booleano (conjunto potencia)

Sea A cualquier conjunto, el conjunto formado por todos los subconjuntos de A es el conjunto booleano (conjunto potencia) de A y se denota como $\mathfrak{B}(A)$ o 2^A.

Para encontrar el conjunto booleano de A se debe tomar en cuenta que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto y que un conjunto dado es subconjunto de si mismo.

El número de elementos del conjunto booleano es $2^{n(A)}$, en donde $n(A)$ es el número de elementos de A. Es decir, es válida la siguiente fórmula:

$$n(\mathfrak{B}(A)) = 2^{n(A)}.$$

La fórmula anterior justifica la notación de potencia $\mathfrak{B}(A) = 2^A$.

Ejemplo 2.4

Sea $A = \{a, b\}$, entonces el conjunto booleano de A es

$$\mathfrak{B}(A) = 2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\},$$

ya que A tiene 2 elementos $\mathfrak{B}(A)$ tiene $2^2 = 4$ elementos.

Ejemplo 2.5

¿Cuántos elementos tiene $\mathfrak{B}(B)$ si $B = \{\{a\}, \emptyset, 1\}$?

Ya que B tiene 3 elementos, $\mathfrak{B}(B)$ tiene $2^3 = 8$.

2.6. Conjuntos de números

A continuación se describen por comprensión los conjuntos de números que están incluidos en el conjunto de números reales y que serán utilizados en los ejercicios propuestos.

Números naturales

$\mathbb{N} = \{n \mid n \text{ es un número entero positivo}\} = \{1, 2, 3, ...\}$

Números enteros

$\mathbb{Z} = \{z \mid z \text{ es un número entero negativo, cero o un entero positivo}\}$

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

El conjunto de números enteros incluye al conjunto de naturales.

Números racionales

$\mathbb{Q} = \{q \mid q \text{ es un número de la forma } \frac{a}{b} \text{ donde } a \text{ y } b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\}$

Los números racionales tienen fracción decimal finita o infinita periódica, por ejemplo:

$$\frac{11}{4} = 2.75$$

$$\frac{1}{3} = 0.33333333333333333\ldots = 0.(3)$$

$$\frac{4}{7} = 0.571428571428\ldots = 0.(571428)$$

$$\frac{367}{300} = 1.2233333333333\ldots = 1.22(3)$$

El conjunto de los racionales incluye al conjunto de enteros.

Números irracionales

Las fracciones decimales infinitas no periódicas representan a los números irracionales, por ejemplo

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769\ldots$$

$$\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751\ldots$$

Es claro que los números irracionales no se pueden representar como $\frac{a}{b}$ donde a y $b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$.

Números reales

El conjunto de números reales incluye al conjunto de racionales y al de irracionales. Es decir, los números reales son fracciones decimales finitas o infinitas con el acuerdo de que

$$0.(9) = 0.9999999999999999999999999\ldots = 1.$$

El conjunto de los números reales se representa de manera gráfica por la recta numérica que se muestra en la Figura 1. Cada punto de la recta es un número real.

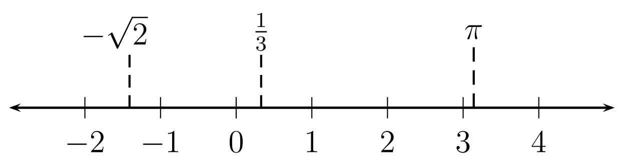

Figura 1. Recta numérica

El símbolo que representa al conjunto de los números reales es $\mathbb{R}$, si consideramos el conjunto de los números reales como conjunto universo entonces $\mathbb{Q}^c$ es el conjunto de los números irracionales.

3. Operaciones con conjuntos

Prerrequisitos

- Conceptos básicos de conjuntos

Objetivos específicos

- Describir y realizar las operaciones de unión, intersección y diferencia de conjuntos

Unión

La operación unión entre los conjuntos A y B consiste en juntar los elementos de A con los elementos de B en un tercer conjunto. Entonces al conjunto unión de A y B pertenecen los elementos que a su vez pertenecen a A o a B o a ambos. La expresión simbólica de la unión de conjuntos es

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } \ x \in B\}.$$

Intersección

La intersección entre los conjuntos A y B es el conjunto que contiene los elementos que comparten A y B, es decir, al conjunto intersección de A y B pertenecen los elementos que pertenecen a A y que pertenecen a B. En símbolos

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \text{ y } x \in B\}.$$

Si la intersección de A y B es el conjunto vacío se dice que los conjuntos A y B son conjuntos disjuntos (ajenos).

Diferencia

El conjunto diferencia, que se representa como $A - B$ o también como $A \setminus B$, es el conjunto de los elementos que pertenecen al conjunto A pero no pertenecen al conjunto B. Con símbolos se escribe como

$$A - B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

Ya que el conjunto de elementos que no pertenecen a B es igual a B^c, entonces se tiene que

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B^c\} = A \cap B^c.$$

Ejemplo 3.1

Sean los conjuntos
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$B = \{a, b, c\}$, y
$C = \{1, 2, a, b\}$.
Entonces
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c\}$;
$A \cap B = \emptyset$;
$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b\}$;
$A \cap C = \{1, 2\}$;
$B \cup C = \{1, 2, a, b, c\}$;
$B \cap C = \{a, b\}$;
$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$;
$B - C = \{c\}$;
$C - B = \{1, 2\}$.

4. Diagramas de Venn

Prerrequisitos

1. Conceptos básicos de conjuntos
2. Operaciones con conjuntos

Objetivos específicos

1. Representar a los conjuntos y sus operaciones con diagramas de Venn
2. Utilizar diagramas de Venn para determinar igualdades entre conjuntos

El matemático inglés John Venn (1834 -1923) fue el creador de los diagramas utilizados para la representación gráfica de los conjuntos. En un diagrama de Venn se dibujan círculos enmarcados en un rectángulo. Los círculos son los subconjuntos del conjunto universal representado por el rectángulo. En el diagrama se enfatizan, por ejemplo con sombreados, los subconjuntos de interés. Las Figuras 2 y 3 son los diagramas de Venn del conjunto complemento de A y de la relación de inclusión, respectivamente.

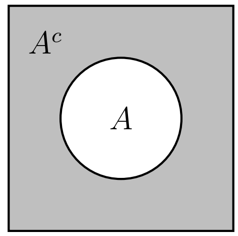

Figura 2. A complemento

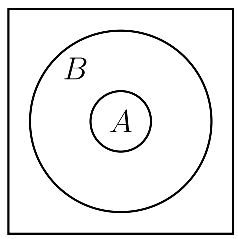

Figura 3. A es subconjunto de B

Los diagramas de Venn se pueden utilizar también para representar gráficamente las operaciones entre dos o tres conjuntos como lo demuestran las siguientes figuras.

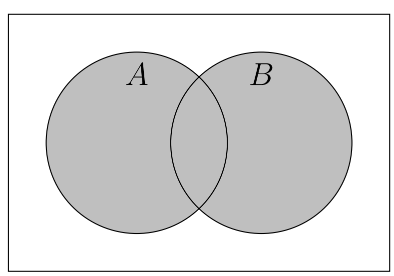

Figura 4. $A \cup B$

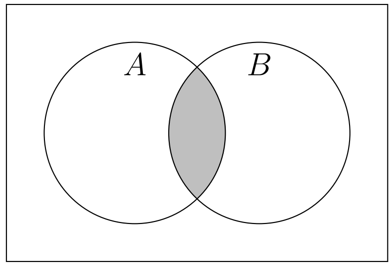

Figura 5. $A \cap B$

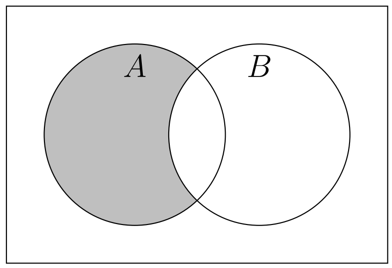

Figura 6. $A - B$

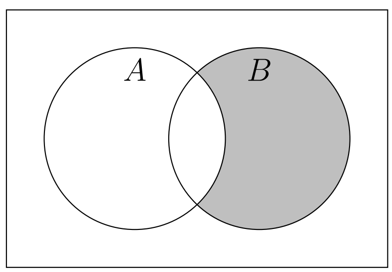

Figura 7. $B - A$

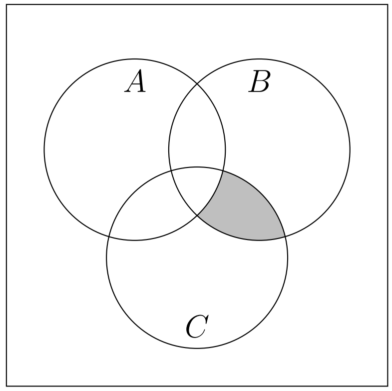

Figura 8. $(B \cap C) - A$

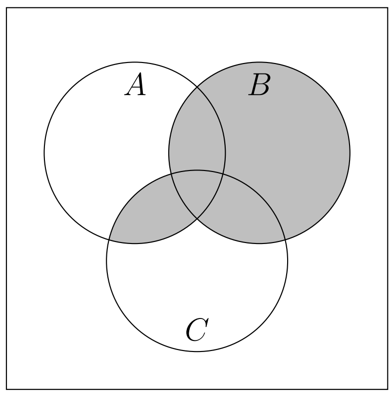

Figura 9. $B \cup (A \cap C)$

5. Tabla resumen de símbolos

Símbolo	Significado	Símbolo	Significado
$\in$	Pertenencia	$\notin$	No pertenencia
$\subset$	Subconjunto propio	$\subseteq$	Subconjunto
$\mid$	tal que	A^c	A complemento
$\emptyset$	Conjunto vacío	Ω	Conjunto universal
$\mathfrak{B}(A)$	Conjunto booleano de A	2^A	Conjunto potencia de A
$\cup$	Unión	$\cap$	Intersección
$\setminus$	Diferencia		

Tabla 1. Símbolos de la teoría de conjuntos