MD-02

Método de las raíces iguales

Juan Alfonso Oaxaca Luna[1]

RESUMEN

El método de las raíces iguales es un procedimiento para construir tangentes de ciertas curvas planas, pero no es sino hasta después de la creación de la geometría analítica Cuando a principios del siglo diecisiete en el que se crea un método unificado para la solución de tangentes. Lo que esencialmente la geometría analítica proporciona la fusionar el álgebra con la geometría ordinaria. Hablar de la tangente es hablar de la inclinación de una recta o de la pendiente de la misma así como de la variación de cambio o simplemente de la derivada, en algún momento de nuestra formación como profesionistas lo hemos hecho, pero acaso nos hemos preguntado cuando nació este concepto y más aún cuáles son sus aplicaciones. En este artículo se hace resaltar el uso de la tangente en la vida cotidiana hasta su aplicación en la enseñanza de la geometría y el cálculo. Se hace el reconocimiento social de la contribución de Rene Descartes junto con Fermat los cuales a través de cálculos geométricos explican lo que posteriormente Leibniz y Newton llamarán el comportamiento geométrico de una función en un punto determinado fijando las bases de una cultura antigua en una diversidad de curvas (se conocían escasamente unas doce) y de la pesada herramienta retórica que en ese momento se disponía.

ABSTRACT

The method of equal roots is a procedure for constructing tangents to certain plane curves, but it is not until after the creation of analytic geometry. When at the beginning of the seventeenth century in which a unified method for the solution of tangents is created. What analytic geometry essentially provides is the fusion of algebra with ordinary geometry. Talking about the tangent is talking about the inclination of a straight line or its slope, as well as the variation of change or simply the derivative, at some point in our training as professionals we have done it, but perhaps we have wondered when this concept was born and even more so what are its applications. This article highlights the use of the tangent in everyday life until its application in the teaching of geometry and calculus. Social recognition of the contribution of Rene Descartes together with Fermat is made, which through geometric calculations explain what Leibniz and Newton will later call the geometric behavior of a function at a given point, setting the bases of an ancient culture in a diversity of curves (some twelve were barely known) and the heavy rhetorical tool that was available at that time.

Palabras clave: raíces, variación, cálculos geométricos, geometría analítica, tangente.

INTRODUCCIÓN

En este artículo, uno de los propósitos es que el lector comprenda el concepto de tangente, planteando la cuestión de cómo se ha configurado el concepto de recta tangente históricamente y cómo su evolución ha determinado la manera en que se presenta actualmente a nuestros estudiantes para la enseñanza del cálculo diferencial. Esto ha permitido identificar tres concepciones (Euclídeana, cartesiana y leibniziana). Como una forma de explicar en contexto el concepto de tangente, se plantea la cuestión de cómo se ha configurado históricamente y cómo su evolución ha determinado la manera en que se presenta actualmente a nuestros estudiantes. En la época griega, las aportaciones de Euclides y Apolonio, por una parte, y de Arquímedes por otra, ya que estas son radicalmente diferentes y marcan las dos tendencias que los posteriores autores persiguen. Arquímedes piensa en la recta tangente como la dirección instantánea del movimiento que sigue una función. En cambio, Euclides y Apolonio la conciben como la recta de mínimo contacto (toca, pero no corta). Esta vertiente desembocaría en la concepción de Descartes, Fermat, Barrow y Leibniz, como límite de rectas secantes (Boyer, 2006).

Esta segunda corriente es la que aparece en los libros de texto y, por tanto, la que aprenden nuestros estudiantes. Hay un corte entre la concepción euclidiana, donde la recta tangente es la recta que toca, pero no corta a la cónica y la posterior concepción cartesiana, donde la recta tangente es considerada como el límite de las rectas secantes a una función en el punto considerado (introducida en Bachillerato). Son, por tanto, las dos concepciones dominantes que se pueden observar en los alumnos. Este salto histórico también se reproduce entre los estudiantes. Es importante destacar también una tercera concepción. Se trata de la forma que tiene Leibniz de concebir una curva como formada por infinitos segmentos. Al prolongar el segmento en el que se encuentra el punto de tangencia obtenemos la recta tangente (Duran, 2008).

METODOLOGÍA O DESARROLLO

Hablar de los cambios que ha sufrido la enseñanza de la tangente, es remontarnos desde prescolar hasta posgrado. En prescolar es el primer momento donde el niño empieza a recortar y observamos cómo sus recortes en una curva son secantes, pero al ir mejorando estos cortes se transforman en tangentes, esto nos hace reflexionar en la **transformación** o cambios que hay que considerar en la enseñanza del cálculo diferencial desde Descartes hasta nuestros días. La Geometría Analítica de “Descartes y Fermat” no fue la excepción a esto, es decir, no fue un producto exclusivo de sus investigaciones, sino más bien, la síntesis de varias tendencias matemáticas convergentes en los siglos XVI y XVII. Es hasta después de la invención de la geometría analítica, donde se hizo un progreso real para lograr un método unificado para resolver problemas de las tangentes. Este método se anticipa a las contribuciones del cálculo de Newton y Leibniz. Esencialmente lo que la geometría analítica proporciono fue una manera de fusionar la geometría ordinaria, trigonometría y álgebra (Geometría Euclidiana), de manera que problemas de una disciplina pudiera

[1] joaxaca@unam.mx
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM
Departamento de Matemáticas, Sección Sistemas Matemáticos Discretos

Memorias del Congreso Científico Tecnológico de las carreras de
Ingeniería Mecánica Eléctrica, Industrial y Telecomunicaciones, sistemas y electrónica

Año 8. No. 8. ISSN-2448-7236. SEPTIEMBRE 2023 – AGOSTO 2024. MD-02, pág.: 1 a la 5.

traducir los problemas correspondientes a la otra, considerando como punto de partida a los pares ordenados de números y de rectas o curvas con sus correspondientes ecuaciones algebraicas.

MÉTODO DE LAS RAÍCES IGUALES

Una de las construcciones básicas de la geometría elemental es trazar una circunferencia con centro en el origen cuya ecuación es: $x^2 + y^2 = 41$, donde su radio igual a 6.4, la cual contiene al punto$(4{,}5)$, ya que la pareja de números satisface la ecuación. Encuentre la ecuación de la tangente en ese punto.

Sabemos que esta tangente debe ser perpendicular al segmento de recta que une el punto $(4{,}5)$ con el origen. Con estos puntos podemos calcular la pendiente del segmento aplicando la ecuación: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; sustituyendo valores $m = \frac{0-5}{0-4}$, simplificando obtenemos $m = \frac{5}{4}$, entonces la tangente tendrá una pendiente inversa y de signo contrario $m = -\frac{4}{5}$, como conocemos el punto de tangencia el cual es común a la recta y la circunferencia, podemos aplicar la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$. Para obtener la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto $(4{,}5)$. Sustituyendo valores $y = 5 + (-\frac{4}{5})(x-4)$; Simplificando obtenemos la ecuación: $y = -\frac{4}{5}x + \frac{45}{5}$,en su forma general $5y + 4x - 45 = 0$ que es la tangente a la circunferencia como se muestra en la siguiente figura 1.

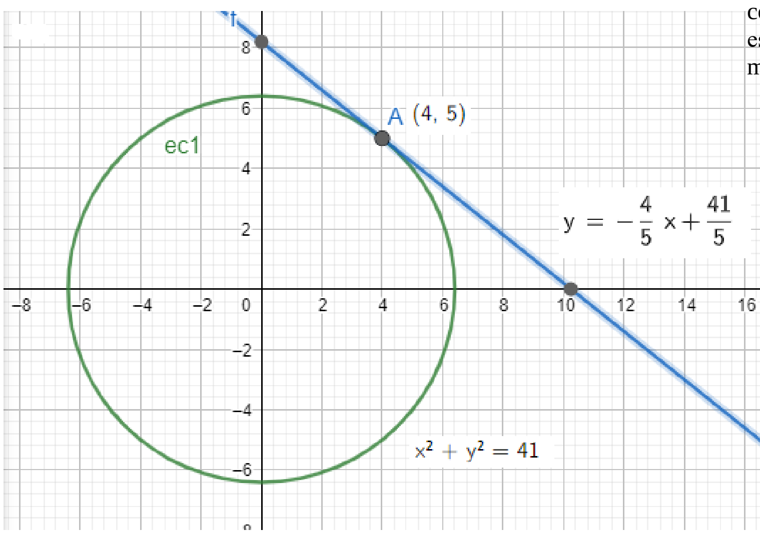

Figura 1. Recta tangente a la circunferencia en el punto (4,5)

Pensemos ahora en una parábola con foco en el punto $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ y la directriz corresponde a la recta $y = -\frac{1}{4}$; recordemos que la definición nos establece "Es el lugar geométrico que se describe en el que la distancia que existe de un punto fijo llamado foco a un punto móvil *(x,y)*, es la misma distancia que hay del punto móvil *(x,y)*, a la recta fija llamada directriz". Bajo esta consideración establecemos: aplicando la ecuación de distancia entre dos puntos y la distancia de un punto a una recta.

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2} = y - \left(-\frac{1}{4}\right)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad.

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = \left(y + \frac{1}{4}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}$$

Simplificando obtenemos: $y = x^2$.

Expresión que corresponde a la ecuación de una parábola con vértice en el origen y que abre hacia arriba. Uno de los puntos de esa parábola es $(2{,}4)$. Ahora nuestro problema es encontrar la ecuación de la tangente a la parábola en ese punto. Primero trazamos una perpendicular al punto de tangencia al eje focal de la parábola. Como este eje coincide con el eje "y", es fácil observar la intersección con esta perpendicular el cual corresponde al punto $(0{,}4)$, un punto que esta 4 unidad arriba del vértice. El correspondiente punto 4 unidades abajo del vértice es $(0.-4)$ y este punto es en el que la tangente intercepta al eje "*y*". Como se muestra en la figura 2.

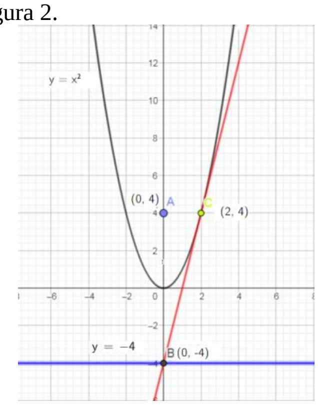

Figura 2. Recta tangente que toca a la parábola y corta la directriz

Conociendo que la recta tangente debe pasar a través de los puntos $(2{,}4)$ y $(0.-4)$, se puede obtener su pendiente. Aplicando la ecuación de pendiente: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, sustituyendo valores

$m = \frac{4-(4-4)}{2-0}$, entonces . Aplicando la ecuación de la recta punto pendiente. $y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$; Sustituyendo valores
$y - 4 = (4)(x - 2)$ Simplificando
$y = 4x - 4$, que es la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto $(2,4)$.

Luego de haber ilustrado el uso de la geometría para manejar algebraicamente construcciones geométricas, estamos listos para describir un método para encontrar las tangentes a diversos tipos de curvas. Este método fue desarrollado por René Descartes, a quien se atribuye la invención de la geometría analítica. En los ejemplos anteriores determinamos las tangentes en el caso de una circunferencia y al de una parábola. Sin embargo, empleamos un método diferente en cada caso.
Lo que Descartes se esforzó por crear fue un procedimiento uniforme por el que fuera posible determinar la ecuación de las tangentes sin importar cual fuera la curva en cuestión. El procedimiento de Descartes es conocido hoy como “**el método de las raíces iguales**”. A continuación, se describirá este método y ver hasta qué punto puede resolver el problema general de las tangentes.

Por simplicidad, primero describiremos el método de Descartes de las raíces iguales en una parábola. Si consideramos la misma parábola usada en el ejemplo anterior, con la finalidad de observar las bondades del método. Se tiene la ecuación de la parábola $y = x^2$ y el punto de tangencia $(2,4)$. La ecuación debe tener la forma: $y - 4 = m(x - 2)$, donde la letra *m* representa la pendiente de la recta tangente. Generalmente debemos suponer que la recta esperada intercepta a la parábola en dos puntos distintos, como se muestra en la figura 3.

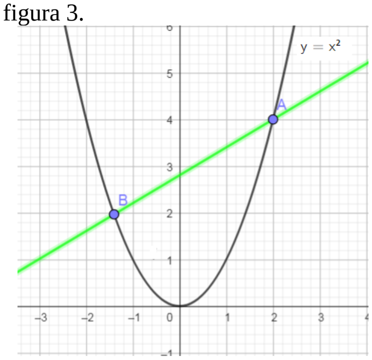

Figura 3. Intersección de la recta esperada con la parábola

Para determinar las coordenadas (x, y) de los puntos de intersección de la recta con la parábola, establecemos la ecuación, las cuales resolveremos en forma simultánea la ecuación de la parábola con la recta: $y = x^2$ con $y = 4 + m(x - 2)$
Igualando ambas ecuaciones
$x^2 - 4 = m(x - 2)$
Igualando a cero
$x^2 - mx + (2m - 4) = 0$

Esta es una ecuación de segundo grado que se puede resolver aplicando la fórmula general.
$$x = \frac{-(-m) \pm \sqrt{(-m)^2 - (4)(1)(2m - 4)}}{(2)(1)}$$
Simplificando
$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 8m + 16}}{2}$$
Como queremos que las raíces sean iguales, entonces el valor de la discriminante debe ser cero, esto significa que la recta toca a la parábola en un solo punto.
De la discriminante $m^2 - 8m + 16 = 0$, aplicando la fórmula general:
$$m = \frac{-(-8) \pm \sqrt{8^2 - (4)(1)(16)}}{2}$$
$$m = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2}$$
Entonces
$m = 4$
Sustituyendo el valor de *m* en la ecuación de la recta:
$y - 4 = m(x - 2)$
$y = 4 + 4(x - 2)$
Simplificando
$y = 4x - 4$
Observamos que esta ecuación coincide con la obtenida geométricamente. Esto deberá ser suficiente para convencernos de que el método de las raíces iguales es eficiente
.
La importancia del método de Descartes radica en que también funciona con otras curvas distintas a la parábola. Podemos aplicar este método para obtener la ecuación de la tangente de una circunferencia en un punto dado. Consideremos la ecuación: $x^2 + y^2 = 41$, y al punto $(4,5)$. Aplicando el método de descartes obtenga la ecuación de la recta tangente en el punto indicado.

Consideremos como antes la ecuación de una recta arbitraria que contiene al punto (4,5) y la ecuación de la circunferencia.
$y = 5 + m(x - 4)$
$x^2 + y^2 = 41$
Sustituyendo el valor de *y* en la segunda ecuación
$x^2 + \left(5 + m(x - 4)\right)^2 = 41$
Desarrollando
$x^2 + 25 + 10mx - 40m + m^2x^2 - 8m^2x + 16m^2 - 41 = 0$
Simplificando
$(1 + m^2)x^2 + (10m - 8m^2)x + (16m^2 - 40m - 16) = 0$

La ecuación anterior es de segundo grado, podemos aplicar la fórmula general para encontrar El punto donde se interceptan y a la vez se hace tangente.

$$x = \frac{-(10m - 8m^2) \pm \sqrt{\left((10m - 8m^2)\right)^2 - (4)(1 + m^2)(16m^2 - 40m - 16)}}{(2)(1 + m^2)}$$

Año 8. No. 8. ISSN-2448-7236. SEPTIEMBRE 2023 – AGOSTO 2024. MD-02, pág.: 1 a la 5.

Como queremos obtener que las raíces sean iguales entonces el valor del discriminante tendrá que ser cero.

$$\left((10m-8m^2)\right)^2-(4)(1+m^2)(16m^2-40m-16=0$$

Simplificando

$$100m^2+160m+64=0$$

Aplicando fórmula general.

$$m=\frac{-(160)\pm\sqrt{(160)^2-(4)(100)(64)}}{(2)(16)}$$

Simplificando

$$m=\frac{-160\pm\sqrt{25600-25600}}{200}$$

$m=-\frac{16}{200}$ o bien $m=-\frac{4}{5}$

Con este valor podemos obtener la ecuación de la tangente a la circunferencia en el punto $(-3,4)$.

De la ecuación establecida: $y=5+m(x-4)$

Sustituyendo el valor de m.

$$y=5+(-\frac{4}{5})(x-4)$$

Simplificando

$$y=-\frac{4}{5}x+\frac{41}{5}$$

Si observamos es la misma ecuación obtenida en forma geométrica.

En si el método de Descartes sirve para unificar la teoría de las tangentes.

El método de Descartes de las raíces exactas logra dar un procedimiento uniforme para determinar tangentes a la circunferencia, parábola o cualquier otra curva que pueda ser representada por una ecuación de segundo grado, en este sentido el método de descartes sirve para unificar la teoría de las tangentes parcialmente ya que si se tiene otra curva que no sea de segundo grado el método no se puede aplicar.

Si tenemos una curva cuya ecuación es $y=x^3$, que contiene al punto (1,1). Obtener la ecuación de la tangente en el punto indicado.

Una recta arbitraria que pasa por el punto (1,1) posee una ecuación de la forma $y-1=m(x-1)$.

Donde *m* representa el valor de la pendiente o inclinación de la recta. De acuerdo con el método de Descartes, tendremos que elegir el valor de *m* de tal forma que las dos ecuaciones siguientes se satisfagan.

$$y=x^3$$

$$y-1=m(x-1)$$

Sin tener que resolver este sistema de ecuaciones, nos podemos imaginar que en la gráfica de la función cubica existen muchas rectas que pasan por el punto (1,1) y que intersectan a la curva una sola vez, pero ninguna de estas rectas es la tangente que buscamos. Esto resulta obvio al ver la gráfica, en la que observamos que en la realidad la tangente toca dos veces la curva, como se muestra en la figura 4.

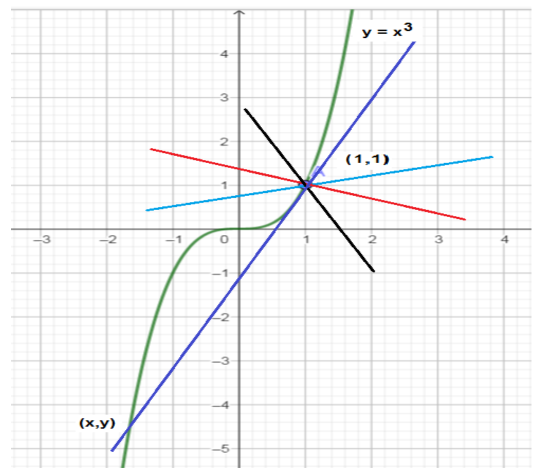

Fig. 4. Muestra algunas de las rectas que cortan a la curva, pero la tangente lo hace dos veces.

En esta situación es inútil tratar de descubrir la pendiente de la tangente usando el método de Descartes ya que cualquier valor que este método nos diera sería la pendiente de una recta que no es la tangente.

Así, el método de Descartes falla totalmente cuando se aplica a la curva representada por la función $y=x^3$, De hecho falla, por las mismas razones con todas las curvas descritas por la función cubica. Es obvio que cuando la tangente intersecta a la curva en más de un punto, no podremos determinar la pendiente de la tangente aplicando el método de las raíces iguales.

CONCLUSIONES:

En su tiempo, el método de Descartes de las raíces iguales represento un verdadero adelanto en la búsqueda de un método uniforme para encontrar tangentes a la curva; pero a pesar de su éxito parcial, se quedó corto en la consecuencia de la meta deseada.

Del estudio histórico nos interesa remarcar dos aspectos: Por un lado, el análisis epistemológico ha permitido identificar tres maneras diferentes de concebir el concepto de recta tangente a lo largo de la historia:

- Concepción euclídea: la recta tangente:como aquella que toca, pero no corta a una cónica.
- Concepción cartesiana: la recta tangente:como el límite de las rectas secantes.

Año 8. No. 8. ISSN-2448-7236. SEPTIEMBRE 2023 – AGOSTO 2024. MD-02, pág.: 1 a la 5.

- Concepción leibniziana: toda función está formada por segmentos infinitesimales; al prolongar el segmento en el que se encuentra el punto de tangencia obtenemos la recta tangente.

Observamos que por cualquier método los resultados son iguales, queda a elección del estudiante aplicar el método geométrico, método de Descartes o aplicar derivadas, según se le facilite. La contribución es que el estudiante conozca diferentes métodos de solución para un problema determinado y que vea que antes de que existiera el cálculo diferencial los procedimientos de cálculo eran geométricos desde la existencia de los griegos.

AGRADECIMIENTO

Agradezco al programa UNAM-DGAPA PAPIME 108022 por el apoyo brindado.

REFERENCIAS

Boyer, C. (2006), *Historia de la matemática*, Madrid: Alianza,

Durán, A. (2008). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*. Madrid: Alianza.

Collette, J.l (2006). *Historia de las Matemáticas*. México. México: Editorial Siglo Veintiuno.

Edwards, C.H. (2009). *The Historical Development of the Calculus.* New York, Inc. USA: Springer-Verlag Newman.

James R. (2010). *El Mundo de las Matemáticas*. México: Enciclopedia Sigma, Tomo 4. Ediciones Grijalbo.

Radford, L. (2016). «Epistemology as a research category in mathematics teaching and learning», en B. HODGSON, A. Kuzniak, y J. LAGRANGE (eds.), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues*, Springer, Suiza, 31-41.

Rey pastor, J., y J. BABINI (1997). *Historia de la Matemática*. Barcelona: Gedisa.

Struik, D. (2011). *A concise History of Mathematico.* Inc. New York, USA: Dover publications.

Thuiller, P. (2005). *De Arquímedes a Einstein. Las Caras Ocultas de la Invención Científica*. México*:* Consejo Nacional para la cultura y las Artes / Editorial Alianza.

INFORMACIÓN ACADÉMICA

Soy formación Ingeniero Químico Industrial, Maestro en Educación Matemática y Doctor en Educación, tengo dos diplomados uno en Administración para no Administradores y el segundo en Sistemas de Informática. Actualmente soy Profesor de Carrera Titular “A” TC Definitivo adscrito al Departamento de Matemáticas con 40 años de antigüedad y 47 años como docente. He impartido 53 cursos de actualización a profesores de la UNAM y otras Instituciones. 32 conferencias impartidas en diversas instituciones. 86 trabajos presentados en congresos nacionales e internacionales. 27 publicaciones entre notas y problemarios de matemáticas para las carreras de la FES-C. Publicación de 22 artículos arbitrados en memorias de congresos nacionales e internacionales y 2 artículos en revistas internacionales indizadas. Tutor de los programas PRONABES, BECALOS Y PROFEL. Responsable de programas de servicio social. Asesor de 47 tesis de licenciatura. *Coordinador Académico del Diplomado en Matemáticas Activas primera y segunda generación.* Asesor de los Talleres Generales de Actualización. Miembro del Comité Evaluador del Premio “Gustavo Baz Prada”. Miembro de la Comisión Revisora del Plan de Estudios de la Licenciatura de Contaduría e Ingeniero Químico de la FES-C. Miembro del comité evaluador científico de 10 congresos de matemáticas e ingeniería nacionales e internacionales. Coordinador General de 1 congreso nacional y 7 congresos internacionales en la enseñanza y aplicación de las matemáticas. Responsable de 1 cátedra y cuatro proyectos PAPIME y un PIIAPI, Autor de 5 libros con ISBN.