Memorias del Congreso Científico Tecnológico de las carreras de
Ingeniería Mecánica Eléctrica, Industrial y Telecomunicaciones, sistemas y electrónica

AÑO 8. No. 8. ISSN-2448-7236. SEPTIEMBRE 2023 – AGOSTO 2024. EM-09, pág.: 1 a la 3.

EM-09

Optimización del volumen de un tanque abierto como un problema geométrico de aplicación de la derivada

José Juan Conteras Espinosa*, José Luz Hernández Castillo, Iván Noé Mata Vargas

RESUMEN

Con este trabajo se deja ver claramente una de las aplicaciones fundamentales del cálculo diferencial e integral, referente al tema de máximos y mínimos como una aplicación real, en el diseño de un tanque cilíndrico circular recto de almacenamiento de aceite o de cualquier fluido que se deseara. La solución se obtiene con el criterio de la segunda derivada para observar la bondad y rapidez de este criterio, si $f''(x_0) \neq 0$.

ABSTRACT

This work clearly shows one of the fundamental applications of difference and integral calculus, referring to the subject of maxima and minima as a real application, in the design of an oil storage tank or any desired fluid. The solution is obtained with the criterion of the second derivative to observe the goodness and speed of this criterion.

Palabras claves: Ingeniería, matemáticas, optimización, derivada, software, enseñanza.

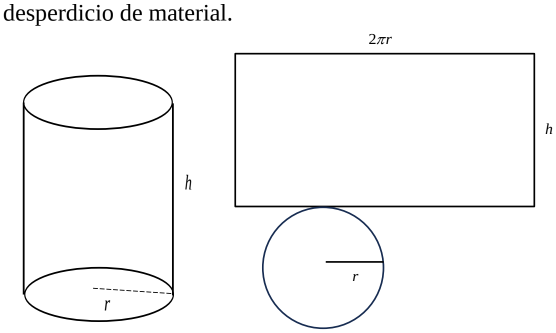
INTRODUCCIÓN

En la ingeniería es muy frecuente interesarse en los valores máximos y mínimos relativos de una función; en la realidad, una compañía siempre le va a beneficiar maximizar sus ganancias a la vez que minimiza los costos en la fabricación del algún producto. Observe que todas las latas que contienen, por ejemplo, 12 oz de alimento (355 ml) tienen el mismo aspecto físico. El hecho de que todas las latas de un volumen específico tengan la misma forma (mismos radio y altura) no es coincidencia, puesto que hay dimensiones específicas que minimizan la cantidad de metal usado y, entonces, reducen los costos de construcción de la lata a una compañía embotelladora. Esto no es tan simple como el que una empresa copie el éxito de otra empresa, sino, en vez de ello, que un gran número de ingenieros buscan el diseño que minimice la cantidad de material usado. (Zill,2011,p.235).

En general, la función que describe la cantidad que se quiere optimizar, al encontrar su valor máximo o mínimo, la definiremos como función objetivo. Una relación entre las variables en un problema de optimización (principalmente está relacionada con algún valor fijo o constante) se le denominara función restricción. La restricción es la que va a facilitar la eliminación de una de las variables en la construcción de la función objetivo, así también, impone una limitación sobre la forma en que las variables pueden modificar en la realidad.

Metodología o desarrollo.

Se quiere diseñar un tanque de forma cilíndrica circular recto de almacenamiento de aceite, se cuenta con 200 m^2 de lámina, ¿Cuáles serán las dimensiones de dicho tanque para que se pueda almacenar el máximo volumen de aceite? Nota: el tanque no tiene tapa ver figura 1. No tomar en cuenta el espesor del corte ni el desperdicio de material.



$$V = \pi r^2 h, \quad A_T = A_B + A_L \;, \quad A_B = \pi r^2; \;\; A_L = 2\pi rh$$
$$A_T = \pi r^2 + 2\pi rh$$

Figura 1.- Volumen de un cilindro circular recto, con la representación del correspondiente volumen y áreas que definen al problema.

Solución

El dominio práctico del experimento es [0,2r]. Ver figura 2.

Lo que se desea optimizar es el volumen del tanque. Se sabe que el volumen de un cilindro circular recto está dado por

$$V = \pi r^2 h \qquad (1)$$

* Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM, Departamento de Matemáticas, Correo electrónico: jjuncon@unam.mx. Dr. Juan José Contreras Espinosa, Dr. José Luz Hernández Castillo, Dr., Iván Noé Mata Vargas.

como el volumen depende de r y h, se deben tener relaciones auxiliares para dejar el volumen en función de r o de h.

Se conoce el área lateral de un cilindro circular recto

$$Al = 2\pi rh \qquad (2)$$

y también el área de la base.

$$Ab = \pi r^2 \qquad (3)$$

Ahora se encuentra el área total del tanque.

$$At = Ab + Al \qquad (4)$$

Se sustituye (2) y (3) en (4).

Se sabe que $At = 200\ m^2$ entonces.

$200 = \pi r^2 + 2\pi rh$, se despeja h.

$$h = \frac{200 - \pi r^2}{2\pi r} \qquad (5)$$

Se sustituye (5) en (1).

$V = \pi r^2 h$

$$V(r) = (\pi r^2)\left(\frac{200 - \pi r^2}{2\pi r}\right)$$

Realizando operaciones y simplificando.

$$V(r) = (\cancel{\pi r})r\left(\frac{200 - \pi r^2}{2\cancel{\pi r}}\right) = \frac{r(200 - \pi r^2)}{2} = \frac{200r - \pi r^3}{2}$$

o bien $V(r) = 100r - \frac{\pi r^3}{2}$.

Entonces el volumen ahora quedó en función de la variable r, derivar el volumen, con respecto a r.

$V'(r) = 100 - \frac{3\pi r^2}{2}$ se resuelve $V'(r) = 0$.

$100 - \frac{3\pi r^2}{2} = 0$, se despeja r.

$-\frac{3\pi r^2}{2} = -100$; $\frac{3\pi r^2}{2} = 100$; $r^2 = \frac{100}{\frac{3}{2}\pi}$; $r^2 = \frac{200}{3\pi}$;

$r^2 = \frac{2(3\pi)(100)}{(3\pi)^2}$; $r = \frac{10\sqrt{6\pi}}{3\pi} = 4.6065m$

Se calcula la segunda derivada del volumen respecto a r.

$$V''(r) = -\frac{6\pi r}{2} = -3\pi r$$

Ahora se sustituye $r = \frac{10\sqrt{6\pi}}{3\pi}$ en la segunda derivada.

$$V''\left(\frac{10\sqrt{6\pi}}{3\pi}\right) = -\cancel{3\pi}\left(\frac{10\sqrt{6\pi}}{\cancel{3\pi}}\right) = -10\sqrt{6\pi} < 0$$

Por lo tanto, existe un valor máximo en $r = \frac{10\sqrt{6\pi}}{3\pi}$.

Como ya se conoce r se sustituye en (5) para calcular h. Quedando.

$$h = \frac{200 - \pi r^2}{2\pi r}, \quad r^2 = \frac{200}{3\pi}$$

$$h = \frac{200 - \pi\left(\frac{200}{3\pi}\right)}{2\pi\left(\sqrt{\frac{200}{3\pi}}\right)} = \frac{\frac{200(3-1)}{3}}{2\pi\left(\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}}\right)} = \frac{\frac{200(2)}{3}}{\frac{20\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}}} = \frac{2(200)\sqrt{3\pi}}{3(20\pi\sqrt{2})}$$

$$h = \frac{20\sqrt{3\pi}}{3\pi\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{6\pi}}{6\pi} = \frac{10\sqrt{6\pi}}{3\pi}$$

$$h = \frac{10\sqrt{6\pi}}{3\pi}$$

Observar que $r = h$.

Calculando el volumen con r y h encontrados.

$$V = \pi\left(\frac{10\sqrt{6\pi}}{3\pi}\right)^2\left(\frac{10\sqrt{6\pi}}{3\pi}\right) = \pi\left(\frac{10\sqrt{6\pi}}{3\pi}\right)^3 = \pi\left(\frac{1000(6\pi)\sqrt{6\pi}}{27\pi^3}\right)$$

$$V = \frac{1000(2)\sqrt{6\pi}}{9\pi} = \frac{2000\sqrt{6\pi}}{9\pi}$$

V $\approx$ $307.2059m^3$, es el volumen máximo que se puede almacenar con 200 m^2 de lámina.

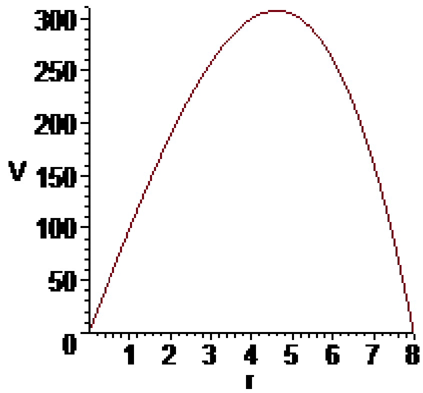


Figura 2.- Gráfica de la función volumen. Donde se observa el volumen máximo.

Conclusiones

Los ejercicios de aplicación en ingeniería son esenciales para que los estudiantes adquieran habilidades prácticas, conecten la teoría con la práctica, apliquen conocimientos multidisciplinarios, se preparen para el mundo laboral, refuercen el aprendizaje y desarrollen habilidades de resolución de problemas. Estos ejercicios desempeñan un papel fundamental en la formación de ingenieros competentes y preparados para enfrentar los desafíos del campo de la ingeniería.

Además, la resolución de ejercicios de aplicación es muy importantes por que simula situaciones y desafíos que los estudiantes pueden encontrar en su futura carrera profesional. Esto les brinda la oportunidad de familiarizarse con los tipos de problemas que pueden enfrentar y les permite desarrollar habilidades y competencias relevantes para el mundo laboral.

Agradecimientos

Trabajo realizado con el apoyo del programa UNAM-DGAPA-PAPIME 108322.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

Stewart, J. (2021). Cálculo de una variable. Trascedentes tempranas. México: CENGAGE.
Thomas. (2015). Cálculo de una sola variable. México. PEARSON.
Zill, D. (2011). Cálculo de una variable. Trascedentes tempranas. México. McGRAW-HILL.

INFORMACIÓN ACADÉMICA

José Juan Contreras Espinosa: Ingeniero Mecánico Electricista egresado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, Maestro en Ingeniería orientación Metal Mecánica egresado de la División de Estudios de posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM y Doctor en Educación, UCI.
José Luz Hernández Castillo: Ingeniero Agrícola egresado de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM, Maestro en Educación egresado de la UCI y Doctor en Educación de la UCI.
Iván Noé Mata Vargas: Ingeniero Mecánico egresado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, Maestro en Ingeniería orientación Metal Mecánica egresado de la División de Estudios de posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM y Doctor en Educación, UCI.