



Métodos numéricos clásicos para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden

Esiquio Martín Gutierrez Armenta**, Marco Antonio Gutiérrez Villegas*, Alfonso Jorge Quevedo Martínez **, Israel Isaac Gutiérrez Villegas *** ,*, José Alejandro Reyes Ortiz*, María de Lourdes Sánchez Guerrero*, Josué Figueroa González* y Javier Norberto Gutiérrez Villegas*******

RESUMEN

Este artículo tiene la finalidad de realizar una comparación de los métodos clásicos utilizando la solución analítica, así como la utilización de programas realizados en el programa Devc++ de los métodos: Euler, Euler Mejorado o Heun y Runge-Kutta de cuarto orden, estos sirven para la solución de problemas de ecuaciones diferenciales de primer orden con valores iniciales. Cauchy demostró que dada una ecuación diferencial con condiciones iniciales tiene una única solución, estas ecuaciones diferenciales de primer orden, se presentan en toda la ingeniería, ciencias exactas, humanísticas, biológicas, administrativas, medicina, entre otras. El más popular simple de estos métodos es el de Euler. Después le sigue el método de Euler mejorado (Heun) y se tienen muchas variantes que han surgido del método de Runge-Kutta de cuarto orden. Euler fue el primero en realizar un método a lo que hoy se le llama análisis numérico. Sin embargo, en la investigación de estos métodos hay una diferencia en cuanto a la convergencia, así como la estabilidad de estos.

ABSTRACT

This article has the purpose of making a comparison of the classical methods, Euler, Improved Euler or Heun's Method and Runge-Kutta of fourth order, these serve for the solution of the Cauchy problem, which showed that given a differential equation with initial conditions has a single solution, these differential equations of first order, are presented in all engineering, exact sciences, humanities, biology, administration, medicine, among others, the most popular simple is the Euler method. This is followed by the improved Euler (Heun) method, and there are many variants that have emerged from the fourth-order Runge-Kutta method.

Euler was the first to perform a method of what is now called numerical analysis. However, in the investigation of these methods there is a difference in terms of convergence, as well as the stability of these.

Palabras claves: Analytical, devc++, Euler, Cauchy.

INTRODUCCIÓN

analítica, así que una alternativa es La utilización de métodos numéricos los cuales proporcionan valores aproximados de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias puntualmente en un intervalo dado. El primer problema de este tipo de condiciones iniciales fue formulado por Leonhard Euler en 1768, Md. Kamruzzaman and Mithun Chandra Nath, (2018), introdujo el primer método numérico sencillo, para resolver numéricamente la ecuación diferencial ordinarias de primer orden estas pueden ser lineales o no lineales, Md. Nurujjaman. Este método es fundamental entre los métodos numéricos para resolver la ecuación diferencial ordinarias. A pesar de que este método es muy lento, dependiendo del número de particiones, el error de propagación es mucho mayor que la solución exacta. Después, los matemáticos reformularon el método de Euler para aumentar su aceleración, reduciendo el error. Los dos métodos propuestos son el método del punto medio y el método de Euler modificado. Este artículo proporciona una breve revisión de la interpretación geométrica del método de Euler, el método del punto medio y el método de Euler modificado. Heun (llamado método de Euler mejorado), hizo contribuciones adicionales en 1900 y Kutta en 1901. Este último caracterizó por completo el conjunto de métodos R-K de orden 4 y propuso el primer método de orden 5. En su artículo, que apareció en 1901. Un desarrollo sobre este se encuentra en el artículo Geeta Arora and Varun Joshi, Isa Sani Garki, Picard propuso un método utilizando el teorema fundamental del cálculo integral 1891[4]., comienza reformulando el problema del valor inicial IKYoussef.A.El-Arabawy

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0 \quad (1)$$

De la ecuación (1) las soluciones convergen. los autores demuestran John H. Hubbard, Samer S. Habre, and Beverly H. West [6], demuestran el teorema, que si $f(t, x)$, está definida para $t \in [a, b]$, $x \in [c, d]$ y satisface la condición de Lipschitz $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$ para $t \in [a, b]$, $x_1, x_2 \in [c, d]$ si $u_n : [a, b] \rightarrow [c, d]$ es una sucesión de aproximaciones de Euler

* UAM-Azcapotzalco, Departamento de Sistemas Área, Sistemas Computacionales. emga@azc.uam.mx, magv@azc.uam.mx, jaro@azc.uam.mx, jfgo@azc.uam.mx, lsg@azc.uam.mx.

**UAM-Azcapotzalco, Departamento de Administración, Área de Matemáticas y Departamento de Sistemas, Área Sistemas Computacionales. ajqm@azc.uam.mx.

***Tecnológico Nacional de México (TecNM)- Tecnológico de estudios superiores de Ecatepec (TESE)-División de ingeniería en sistemas computación. iigv@hotmail.com, jgutierrez@tese.edu.mx.

****IPN-Escuela Superior de Física y Matemáticas – Departamento de Ingeniería y Ciencias Sociales. iigv@hotmail.com.



para la ecuación diferencial ordinaria de primer orden dada por $x' = f(x, t)$ con $u(t_0) = c$ con longitudes de paso que tienden a 0, y si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = c$ existe para algunos $t_0 \in [a, b]$ entonces existe una única solución para $x' = f(x, t)$ con $u(t_0) = c$. Si teorema no es verdadero para la caución diferencial (1) cuando $x = 0$, es decir, cuando la solución cruza el eje t .

Pero las aproximaciones de Euler de convergen si cumplen la condición de Laphitz: si una sucesión de Aproximación de Euler $u_n(t)$, definida para $t \in [a, b]$, todas satisfacen $u_n(t) > \varepsilon$ ó $u_n(t) < -\varepsilon$ era algún $\varepsilon > 0$ entonces se aplica el teorema entonces se aplica el Teorema y las u_n convergen a una solución si convergen en un solo punto. Se afirma esto en la siguiente proposición.

Proposición. Sea $h_k > 0$ sea una sucesión de longitudes de paso que tiende a 0, y sea u_k una sucesión que se aproximaciones al método de Euler con longitud de paso h_k .

1. Si existe t_0 tal que $c_k = u_k(t_0)$ converge a c con $c > 0$, entonces la sucesión $u_k(t)$ converge para cada $t \geq t_0 - 2\sqrt{c} = b$ la función a la función $v(t) = \frac{(t-b)^2}{4}$
2. Si existe t_0 tal que $c_k = u_k(t_0)$ converge a c con $c < 0$, entonces la sucesión $u_k(t)$ converge para cada $t \geq t_0 - 2\sqrt{-c} = b$ la función a la función $v(t) = -\frac{(t-b)^2}{4} + 1$ echo depende de la igualdad fundamental Teorema sin el cual es esencialmente imposible probar nada acerca de las diferentes cuestiones. Lo reformulamos aquí con el siguiente teorema.

TEOREMA.

Sea $f(x, t)$ definida para todo $t \in [a, b]$, $x \in [c, d]$ y satisface la condición de Lipschitz $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$ para todo $t \in [a, b]$, $x_1, x_2 \in [c, d]$ Supongamos que $u_1, u_2 : [a, b] \rightarrow [c, d]$ son funciones continuas diferenciables por partes que satisfacen $|u_2'(t) - f(t, u_2(t))| \leq \delta$,

Para todos los puntos $t \in [a, b]$ donde las funciones u_1, u_2 n diferenciables y $|u_1(t_0) - u_2(t_0)| \leq \delta$. Para algunos δ_1, δ_2 , $\delta \geq 0$ entonces $|u_1(t_0) - u_2(t_0)| \leq \delta$. Entonces:

$$|u_1(t_0) - u_2(t_0)| \leq \delta e^{K|t-t_0|} + \frac{\delta_1 + \delta_2}{K} (e^{K|t-t_0|} - 1) \quad (2)$$

Se puede pensar que las ε son los errores de las pendientes que miden hasta qué punto u_1, u_2 no tienen la pendiente adecuada para ser la solución $x' = f(x, t)$ δ como el error de la condición inicial. Entonces, independientemente de la elección de la condición inicial, las aproximaciones sucesivas $y_n(t)$ convergen en algún intervalo $[t_0, t_0 + h]$ la solución del problema 1. Además, si $f(t, y)$ es continua en el rectángulo R , entonces el error de la solución aproximada se estima por la desigualdad

$$\varepsilon_n = |y(t) - y_n(t)| \leq ML^n \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}, M = \max_{(t,y) \in R} |f(t, y)| \quad (3)$$

METODOLOGÍA

Se utilizarán los métodos de Euler, Euler Mejorado (método de Heun) y de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver la ecuación (4) con algunas con el mismo paso para realizar comparaciones respectivas con su solución analítica.

Se tiene el problema de valores iniciales.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) & a < t < b \\ y(a) = \alpha \end{cases} \quad (4)$$

Como en los métodos numéricos se debe de tener una partición para el tiempo sea $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ de paso $h > 0$, donde $t_0 = a$ y $t_n = b$ a partir de la condición inicial se determinarán las otras aproximaciones.

La generalización del método de Euler viene dada por:

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i) \quad (5)$$

Para el método de Euler mejorado (método de Heun)

$$y_{i+1}^* = y_i + h f(t_i, y_i), i = 0, 1, \dots \quad (6)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1}^*)] \quad (7)$$

Método de Runge-Kutta.

$$k_1 = f(t_i, y_i) \quad (8)$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right) \quad (9)$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2\right) \quad (10)$$



$$k_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3) \quad (11)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (12)$$

APLICACIÓN 1

Resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria por los métodos numéricos anteriores compararla con la solución analítica.

$$\frac{dy}{dx} = y + x, y(0) = 1 \quad y(1) = ? \quad h = 0.05. \quad \text{Solución analítica}$$

$$y(x) = 2e^x - x - 1.$$

Tabla 1. Muestra los resultados en cada iteración.

N	X	EULER	EULER MEJORADO	RUNGE KUTTA	ANALÍTICA
0	0	1	1	1	1
1	0.05	1.05	1.05125	1.05125	1.05254219
2	0.1	1.105	1.105125	1.10643906	1.11034184
3	0.15	1.16525	1.16425625	1.16576906	1.17366849
4	0.2	1.2310125	1.22890656	1.22945223	1.24280552
5	0.25	1.30256313	1.29935189	1.29771166	1.31805083
6	0.3	1.38019128	1.37588199	1.37078188	1.39971762
7	0.35	1.46420085	1.45880108	1.44890945	1.4881351
8	0.4	1.55491089	1.54842864	1.53235356	1.5836494
9	0.45	1.65265643	1.64510007	1.62138668	1.68662437
10	0.5	1.75778925	1.74916757	1.71629525	1.79744254
11	0.55	1.87067872	1.86100095	1.81738038	1.91650604
12	0.6	1.99171265	1.9809885	1.92495862	2.0442376
13	0.65	2.12129828	2.10953793	2.03936275	2.18108166
14	0.7	2.2598632	2.24707732	2.16094259	2.32750541
15	0.75	2.40785636	2.39405619	2.2900659	2.48400003
16	0.8	2.56574918	2.5509465	2.42711928	2.65108186
17	0.85	2.73403664	2.71824382	2.57250914	2.8292937
18	0.9	2.91323847	2.89646851	2.72666273	3.01920622
19	0.95	3.10390039	3.08616694	2.8900292	3.22141932
20	1	3.30659541	3.28791279	3.06308069	3.43656366

Aplicación 1

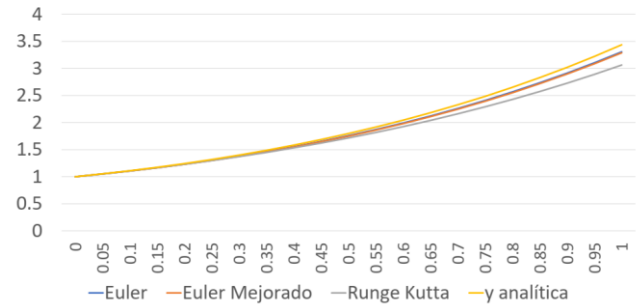


Figura 1.- Muestra gráficamente las aproximaciones con la solución analítica.

Aplicación 2.

Resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria por los métodos numéricos anteriores compararla con la solución analítica.

$$\frac{dy}{dx} = y \cos(x), y(0) = 1 \quad y(1) = ? \quad h = 0.05.$$

$$\text{solución analítica } y(x) = e^{\sin(x)}$$

Tabla 2. Muestra los resultados en cada iteración

N	X	EULER	EULER MEJORADO	RUNGE KUTTA	ANALÍTICA
0	0	1	1	1	1
1	0.025	0.5	0.75625	0.75625	0.60972587
2	0.05	0.25062474	0.37844518	0.57239833	0.37890546
3	0.075	0.12593789	0.18985554	0.4336084	0.24477591
4	0.1	0.06343944	0.09548166	0.32874657	0.16925495
5	0.125	0.03203481	0.04813756	0.24945141	0.12922991
6	0.15	0.01621554	0.02432787	0.18943835	0.11066784
7	0.175	0.00822757	0.0123244	0.14398003	0.10504301
8	0.2	0.00418432	0.00625825	0.10951746	0.10717023
9	0.225	0.00213289	0.00318527	0.08336901	0.1138907
10	0.25	0.00108964	0.00162489	0.06351243	0.1232749
11	0.275	0.00055788	0.00083073	0.04842141	0.13413928
12	0.3	0.00028623	0.00042563	0.03694296	0.14575305
13	0.325	0.00014716	0.00021853	0.02820538	0.15766038
14	0.35	7.5804E-05	0.00011243	0.02154902	0.16957267
15	0.375	3.9123E-05	5.7953E-05	0.01647431	0.18130314
16	0.4	2.0228E-05	2.9928E-05	0.01260258	0.19272723
17	0.425	1.0477E-05	1.5483E-05	0.00964653	0.20375865
18	0.45	5.4352E-06	8.024E-06	0.00738804	0.21433477
19	0.475	2.824E-06	4.1649E-06	0.00566136	0.22440793
20	0.5	1.4694E-06	2.1651E-06	0.0043404	0.23394004



21	0.525	7.6564E-07	1.1271E-06	0.00332923	0.24289948
22	0.55	3.9942E-07	5.8752E-07	0.00255473	0.2512591
23	0.575	2.0861E-07	3.0662E-07	0.00196118	0.25899514
24	0.6	1.0907E-07	1.602E-07	0.00150608	0.26608652
25	0.625	5.7074E-08	8.3783E-08	0.00115696	0.27251445
26	0.65	2.9891E-08	4.3856E-08	0.00088902	0.27826222
27	0.675	1.5666E-08	2.2974E-08	0.0006833	0.28331508
28	0.7	8.2149E-09	1.2043E-08	0.00052528	0.28766017
29	0.725	4.3098E-09	6.3162E-09	0.00040388	0.29128647
30	0.75	2.2619E-09	3.3141E-09	0.00031057	0.29418485
31	0.775	1.1873E-09	1.7395E-09	0.00023884	0.296348
32	0.8	6.2335E-10	9.1314E-10	0.00018368	0.29777048
33	0.825	3.2725E-10	4.7939E-10	0.00014126	0.29844872
34	0.85	1.7178E-10	2.5166E-10	0.00010863	0.29838101
35	0.875	9.015E-11	1.3209E-10	8.3534E-05	0.29756752
36	0.9	4.7292E-11	6.9312E-11	6.4226E-05	0.29601027
37	0.925	2.4798E-11	3.6355E-11	4.9372E-05	0.29371315
38	0.95	1.2995E-11	1.9059E-11	3.7946E-05	0.2906819
39	0.975	6.8048E-12	9.9848E-12	2.9156E-05	0.2869241
40	1	3.5604E-12	5.2271E-12	2.2397E-05	0.28244914

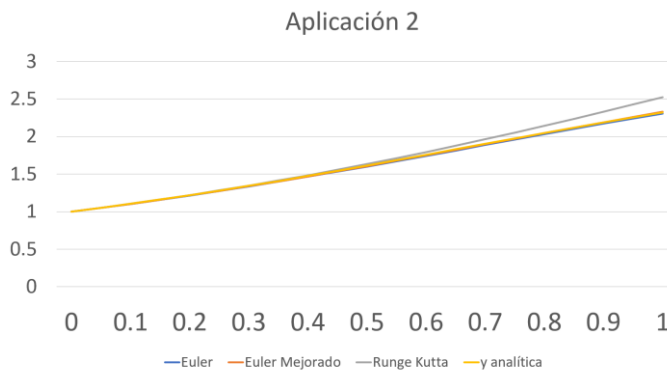


Figura 2.- Muestra gráficamente las aproximaciones con la solución analítica.

APLICACIÓN 3

Resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria por los métodos numéricos anteriores compararla con la solución analítica.

$$\frac{dy}{dx} = y \sin(2x) - 20y, y(0) = 1 \quad y(1) = ? \quad h = 0.025 \quad \text{solución analítica. } y(x) = \left(\frac{-3}{101}\right) \cos(2x) + \left(\frac{30}{101}\right) \sin(2x) + \left(\frac{104}{101}\right) e^{-20x}$$

Tabla 3. Muestra los resultados en cada iteración.

n	x	Euler	Euler Mejorado	Runge Kutta	y analítica
0	0	1	1	1	1
1	0.025	0.5	0.75625	0.75625	0.60972587
2	0.05	0.25062474	0.37844518	0.57239833	0.37890546
3	0.075	0.12593789	0.18985554	0.4336084	0.24477591
4	0.1	0.06343944	0.09548166	0.32874657	0.16925495
5	0.125	0.03203481	0.04813756	0.24945141	0.12922991
6	0.15	0.01621554	0.02432787	0.18943835	0.11066784
7	0.175	0.00822757	0.0123244	0.14398003	0.10504301
8	0.2	0.00418432	0.00625825	0.10951746	0.10717023
9	0.225	0.00213289	0.00318527	0.08336901	0.1138907
10	0.25	0.00108964	0.00162489	0.06351243	0.1232749
11	0.275	0.00055788	0.00083073	0.04842141	0.13413928
12	0.3	0.00028623	0.00042563	0.03694296	0.14575305
13	0.325	0.00014716	0.00021853	0.02820538	0.15766038
14	0.35	7.5804E-05	0.00011243	0.02154902	0.16957267
15	0.375	3.9123E-05	5.7953E-05	0.01647431	0.18130314
16	0.4	2.0228E-05	2.9928E-05	0.01260258	0.19272723
17	0.425	1.0477E-05	1.5483E-05	0.00964653	0.20375865
18	0.45	5.4352E-06	8.024E-06	0.00738804	0.21433477
19	0.475	2.824E-06	4.1649E-06	0.00566136	0.22440793
20	0.5	1.4694E-06	2.1651E-06	0.0043404	0.23394004
21	0.525	7.6564E-07	1.1271E-06	0.00332923	0.24289948
22	0.55	3.9942E-07	5.8752E-07	0.00255473	0.2512591
23	0.575	2.0861E-07	3.0662E-07	0.00196118	0.25899514
24	0.6	1.0907E-07	1.602E-07	0.00150608	0.26608652
25	0.625	5.7074E-08	8.3783E-08	0.00115696	0.27251445
26	0.65	2.9891E-08	4.3856E-08	0.00088902	0.27826222
27	0.675	1.5666E-08	2.2974E-08	0.0006833	0.28331508
28	0.7	8.2149E-09	1.2043E-08	0.00052528	0.28766017
29	0.725	4.3098E-09	6.3162E-09	0.00040388	0.29128647
30	0.75	2.2619E-09	3.3141E-09	0.00031057	0.29418485



31	0.775	1.1873E-09	1.7395E-09	0.00023884	0.296348
32	0.8	6.2335E-10	9.1314E-10	0.00018368	0.29777048
33	0.825	3.2725E-10	4.7939E-10	0.00014126	0.29844872
34	0.85	1.7178E-10	2.5166E-10	0.00010863	0.29838101
35	0.875	9.015E-11	1.3209E-10	8.3534E-05	0.29756752
36	0.9	4.7292E-11	6.9312E-11	6.4226E-05	0.29601027
37	0.925	2.4798E-11	3.6355E-11	4.9372E-05	0.29371315
38	0.95	1.2995E-11	1.9059E-11	3.7946E-05	0.2906819
39	0.975	6.8048E-12	9.9848E-12	2.9156E-05	0.2869241
40	1	3.5604E-12	5.2271E-12	2.2397E-05	0.28244914

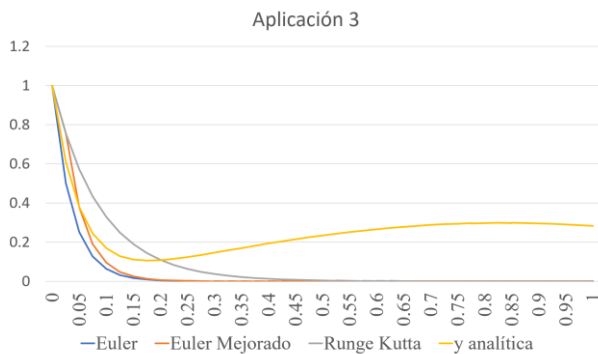


Figura 3.- Muestra gráficamente las aproximaciones con la solución analítica

APLICACIÓN 4.

Resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria por los métodos numéricos anteriores compararla con la solución analítica.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}, y(0) = 4 \quad y(1) = ? \quad h = 0.025 \quad \text{solución analítica}$$

$$y(x) = 3 + e^{-\frac{x}{2}}.$$

Tabla 4. Muestra los resultados en cada iteración.

n	x	Euler	Euler Mejorado	Runge Kutta	y analítica
0	0	4	4	4	4
1	0.025	3.9875	4.04359375	3.9875	3.9875778
2	0.05	3.97515625	4.03101758	3.97515625	3.97530991
3	0.075	3.9629668	4.01859861	3.9629668	3.96319442
4	0.1	3.95092971	4.00633488	3.95092971	3.95122942
5	0.125	3.93904309	3.99422444	3.93904309	3.93941306
6	0.15	3.92730505	3.98226538	3.92730505	3.92774349
7	0.175	3.91571374	3.97045582	3.91571374	3.91621887
8	0.2	3.90426732	3.95879387	3.90426732	3.90483742

9	0.225	3.89296398	3.9472777	3.89296398	3.89359735
10	0.25	3.88180193	3.93590547	3.88180193	3.8824969
11	0.275	3.8707794	3.92467541	3.8707794	3.87153435
12	0.3	3.85989466	3.91358571	3.85989466	3.86070798
13	0.325	3.84914598	3.90263464	3.84914598	3.85001609
14	0.35	3.83853165	3.89182046	3.83853165	3.83945702
15	0.375	3.82805001	3.88114145	3.82805001	3.82902912
16	0.4	3.81769938	3.87059594	3.81769938	3.81873075
17	0.425	3.80747814	3.86018224	3.80747814	3.80856032
18	0.45	3.79738466	3.84989871	3.79738466	3.79851622
19	0.475	3.78741735	3.83974372	3.78741735	3.78859689
20	0.5	3.77757464	3.82971568	3.77757464	3.77880078
21	0.525	3.76785495	3.81981298	3.76785495	3.76912636
22	0.55	3.75825677	3.81003407	3.75825677	3.75957212
23	0.575	3.74877856	3.80037739	3.74877856	3.75013657
24	0.6	3.73941883	3.79084143	3.73941883	3.74081822
25	0.625	3.73017609	3.78142466	3.73017609	3.73161563
26	0.65	3.72104889	3.7721256	3.72104889	3.72252735
27	0.675	3.71203578	3.76294278	3.71203578	3.71355197
28	0.7	3.70313533	3.75387475	3.70313533	3.70468809
29	0.725	3.69434614	3.74492006	3.69434614	3.69593431
30	0.75	3.68566681	3.73607731	3.68566681	3.68728928
31	0.775	3.67709598	3.72734509	3.67709598	3.67875163
32	0.8	3.66863228	3.71872203	3.66863228	3.67032005
33	0.825	3.66027437	3.71020675	3.66027437	3.6619932
34	0.85	3.65202094	3.70179792	3.65202094	3.65376979
35	0.875	3.64387068	3.6934942	3.64387068	3.64564853
36	0.9	3.6358223	3.68529427	3.6358223	3.63762815
37	0.925	3.62787452	3.67719684	3.62787452	3.62970741
38	0.95	3.62002609	3.66920063	3.62002609	3.62188506
39	0.975	3.61227576	3.66130437	3.61227576	3.61415988
40	1	3.60462232	3.65350682	3.60462232	3.60653066

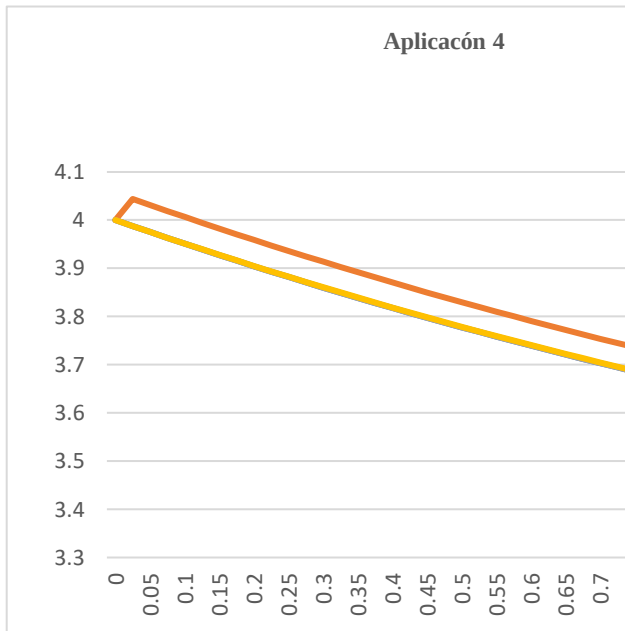


Figura 4.- Muestra gráficamente las aproximaciones con la solución analítica.

APLICACIÓN 5

Resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria por los métodos numéricos anteriores compararla con la solución analítica.

$$\frac{dy}{dx} = y \tan(x), y(1) = 1.55740772465, y(1.5) = ? h = 0.1$$

solución analítica: $y(x) = e^{\sec(x)^2 - 3.42551882081}$

Tabla 5. Muestra los resultados en cada iteración

n	x	Euler	Euler Mejorado	Runge Kutta	y analítica
0	1	1.55740772	1.55740772	1.55740772	1.55740772
1	1.1	1.79995961	1.76868165	1.76868165	1.92475297
2	1.2	2.15360841	2.08446443	2.04824262	1.49107422
3	1.3	2.70754914	2.56595623	2.44041623	2.01983055
4	1.4	3.68283609	3.37933442	3.04592165	3.17886326
5	1.5	5.81810162	5.04137393	4.16951221	7.63816342

Figura 5. Muestra gráficamente las aproximaciones con la solución analítica.

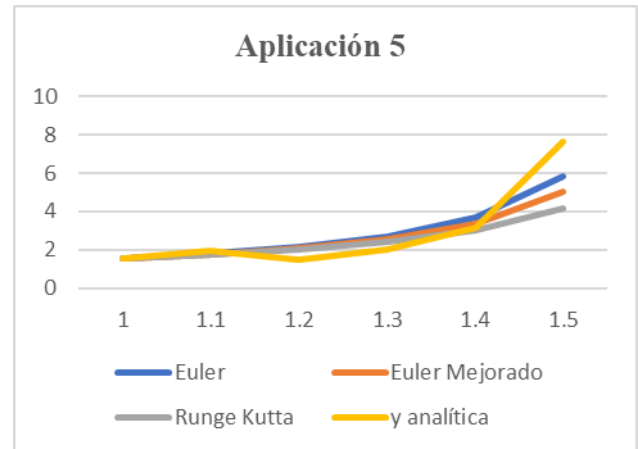


Figura 5.- La solución analítica de la aplicación se muestra en la figura 6.

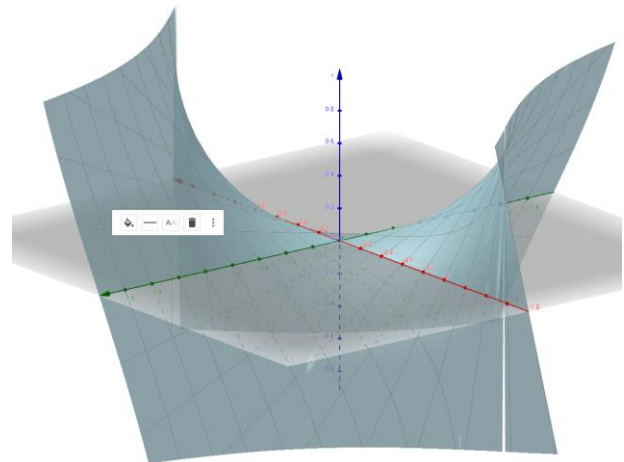


Figura 6. Muestra la solución analítica de la ecuación diferencial ordinaria

En su artículo Zhang Lijuan, Guan Tiannye (2018), utilizan los errores de truncamiento local y global los cuales se muestran en la tabla 6.

redondeo y de truncamiento local y global de los métodos.

Tabla 6.- Se muestra el error local y error global

Método	Error local de truncamiento	Error global de truncamiento
Euler	$O(h^2)$	$O(h)$.
Runge-Kutta segundo orden método de Euler mejorado o de Heun	$O(h^3)$.	$O(h^2)$



Runge-Kutta cuarto orden	$O(h^5)$.	$O(h^4)$.
--------------------------	------------	------------

RESULTADOS Y ANÁLISIS

De las tablas 1 a 5 se observa que el método de Runge-Kutta una mejor aproximación esto es debido al error de truncamiento que tiene cada uno de los métodos, se debe de resaltar que si h es muy pequeña el método de Euler mejorara aproximándose más a la solución analítica, pero en este caso se realizaran bastantes iteraciones, de la aplicación 5. Se observa cómo se alejan Runge-Kutta, de la solución analítica.

CONCLUSIONES

El método de Runge-Kutta es el mejor para utilizarlo en cualquier problema en el cual se debe resolver problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales, de manera aproximada, en la aplicación 5. de la figura 5. Se observa que ya no se puede aproximar con estos métodos, al observar la figura 6. las pendientes crecen rápidamente. Si quiere poner una restricción deberá de anexar el algoritmo que si dos pendientes de $y' = f(t, y)$ dados y_1, y_2 e tiene $|f(t, y_2) - f(t, y_1)| \leq \varepsilon$ para un $\varepsilon > 0$ dependiendo del problema. Si crece mucho los métodos no obtendrán solución.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

- [1]. Arora, G., Joshi, V., & Garki, I. S. (2020). Developments in Runge–Kutta method to solve ordinary differential equations. In *Recent Advances in Mathematics for Engineering* (pp. 193–202). CRC Press.
- [2]. Grafiati. 2021 Journal articles on the topic '120219 - Ecuaciones diferenciales ordinarias. (s/f).
- [3]. Hubbard, J. H., Habre, S. S., & West, B. H. (2001). The convergence of an Euler approximation of an initial value problem is not always obvious. *The American mathematical monthly: the official journal of the Mathematical Association of America*, 108(4), 326. <https://doi.org/10.2307/2695239>
- [4]. Kamruzzaman, M. C. (2018). A Comparative Study on Numerical Solution of Initial Value problem by Using Euler's Method and Runge-Kutta.
- [5]. Nurujjaman, M. (2020). Enhanced Euler's Method to Solve First Order Ordinary Differential Equations with Better Accuracy.
- [6]. Youssef, I. K., & El-Arabawy, H. A. (2007). Picard iteration algorithm combined with Gauss–Seidel technique for initial value problems. *Applied Mathematics and Computation*, 190(1), 345–355. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.01.058>
- [7]. Zhang Lijuan, G. (2018). comparison of several Numerical Algorithms for Solving ordinary Differential Equation initial Value problem. *Advances in Computer Science Research*, 78.

INFORMACIÓN ACADÉMICA

Esiquio Martín Gutiérrez Armenta: Ingeniero Mecánico egresado de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Azcapotzalco del Instituto Politécnico Nacional. Grado de Maestro y Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica en la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Zacatenco. emga@azc.uam.mx.

Marco Antonio Gutiérrez Villegas: Licenciatura y Maestría 100% créditos en Matemáticas en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional. grado de Maestro en Ciencias y Doctorado en Ingeniería Mecánica en el Instituto Politécnico Nacional de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Sección de Estudios de Posgrado e Investigación Unidad Zacatenco. magv@correo.azc.uam.mx

Alfonso Jorge Quevedo Martínez: Ingeniero Industrial egresado de la Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Azcapotzalco. Cuenta con una maestría en Gestión Educativa y otra en Docencia, ambas por la Universidad ETAC campus Coacalco. ajqm@azc.uam.mx

Israel Isaac Gutiérrez Villegas: Grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería en Sistemas en la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Zacatenco. iigv@hotmail.com

José Alejandro Reyes Ortiz: Doctorado en Ciencias de la Computación por el Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), Maestría en Ciencias de la Computación por el Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), Ingeniero en Sistemas Computacionales por el Instituto Tecnológico de Colima. jaro@azc.uam.mx.

Josué Figueroa González: Licenciatura en Ingeniería Electrónica en la Universidad Autónoma Metropolitana, Maestría en Ciencias de la Computación en la Universidad Autónoma Metropolitana. jfgo@azc.uam.mx.

María de Lourdes Sánchez Guerrero: Licenciatura En Computación UAM-Azcapotzalco; Maestría En Ciencias De La Computación UAM-Azcapotzalco. lsg@azc.uam.mx.

Javier Norberto Gutiérrez Villegas: Grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería en Sistemas en la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Zacatenco. jgutierrez@tese.edu.mx.