



## Riemann Georg Friedrich Bernhard su aportación importante al cálculo Integración y al análisis numérico

***Esiquio Martin Gutierrez Armenta\**, Marco Antonio Gutiérrez Villegas\*, Alfonso Jorge Quevedo Martínez \*\*, Israel Isaac Gutiérrez Villegas \*\*\* y \*\*\*\*, José Alejandro Reyes Ortiz\*, María de Lourdes Sánchez Guerrero\*, Josué Figueroa González\* y Javier Norberto Gutiérrez Villegas\*\*\*\***

### RESUMEN

En este artículo tiene la finalidad de mencionar la gran aportación del matemático Riemann Georg Friedrich Bernhard, que dio el paso para encontrar el área bajo la curva, a la que, en nuestros días, se le llama integración, que se incluye en la rama de las matemáticas del cálculo integral, también se desprende de esta teoría el teorema fundamental de cálculo que ayuda encontrar la primitiva que es solución de manera simbólica, en general hay una infinidad de las cuales no se puede encontrar. se utilizará un método numérico para obtener una aproximación del área bajo la curva, con estos métodos se realizan aplicaciones en la cuales si se tiene buenos resultado, pero en otro pasa lo contrario los resultados no son buenos, se calcula la solución analítica para realizar una comparación, el método numérico utilizando es el de la cuadratura de Carl Friedrich Gauss.

### ABSTRACT

The purpose of this article is to mention the great contribution of the Riemann mathematician Georg Friedrich Bernhard, who gave way to analytical integration to what is now called integral calculus, and to the fundamental theorem of calculus, to find the solution of a function of analytical way but in general there are an infinity of which this cannot be found, a method that anyone can use will be used, with these methods applications are made in which one does have good results, but in another the opposite happens the results they are not good, the primitive is also calculated to compare them with this one, in this work the numerical method of the quadrature of Carl Friedrich Gauss will be used.

**Palabras claves:** Riemann, calculus, theorem, Gauss method.

\* UAM-Azcapotzalco, Departamento de Sistemas Área, Sistemas Computacionales. [emga@azc.uam.mx](mailto:emga@azc.uam.mx) Doctor, [magv@azc.uam.mx](mailto:magv@azc.uam.mx) Doctor, [jaro@azc.uam.mx](mailto:jaro@azc.uam.mx) Doctor, [jfgo@azc.uam.mx](mailto:jfgo@azc.uam.mx) M. en C., [lsg@azc.uam.mx](mailto:lsg@azc.uam.mx) M. en C.

\*\*UAM-Azcapotzalco, Departamento de Administración, Área de Matemáticas y Departamento de Sistemas, Área Sistemas Computacionales. [ajqm@azc.uam.mx](mailto:ajqm@azc.uam.mx) M. en G. E.

\*\*\*Tecnológico Nacional de México (TecNM)- Tecnológico de estudios superiores de Ecatepec (TESE)-División de ingeniería en sistemas computación. [iigv@hotmail.com](mailto:iigv@hotmail.com) M. en C., [jgutierrez@tese.edu.mx](mailto:jgutierrez@tese.edu.mx) M. en C.

\*\*\*\*IPN-Escuela Superior de Física y Matemáticas – Departamento de Ingeniería y Ciencias Sociales. [iigv@hotmail.com](mailto:iigv@hotmail.com) M. en C.

### INTRODUCCIÓN

Carl Friedrich Gauss realizo en su tiempo la cuadratura de Gauss-Legendre, lo realizo utilizando un cálculo con fracciones continuas en el año 1814. Donde realizo los cálculos nodos y pesos con 16 dígitos, hasta un orden de 7, nodos y pesos. Carl Gustav Jacobi encontró una conexión entre esta cuadratura y el conjunto ortogonal de los polinomios de Adrien Marie Legendre, Hasta el año de 1942 solo se tenían estos valores para utilizarlo

Carl Friedrich Gauss realizo en su tiempo la cuadratura de Gauss-Legendre, lo realizo utilizando un cálculo con fracciones continuas en el año 1814. Donde realizo los cálculos nodos y pesos con 16 dígitos, hasta un orden de 7, nodos y pesos. Carl Gustav Jacobi encontró una conexión entre esta cuadratura y el conjunto ortogonal de los polinomios de Adrien Marie Legendre, Hasta el año de 1942 solo se tenían estos valores para utilizarlo, este término de cuadratura proviene de la utilización matemática de aproximar el área de una manera irregular con pequeños cuadriláteros, la palabra cuadratura es sinónimo de integración numérica, la cuadratura Gaussiana se originó (1777-1855) quien demostró que una función se puede expresar con un polinomio de grado  $2n-1$  exactamente, resultados utilizados por Ruohong Li , Honglang Wang, (2020) , para más aportaciones de Gauss se encuentra en Axel D. Wittmann, (2020).

La integral de Riemann Georg Friedrich Bernhard es un concepto importante en cálculo integral que utiliza en ingeniería, en casi todas las ciencias, hasta en las sociales entre otras. Para esto se debe tener una función  $f$  continua en un intervalo  $[a,b]$ , la integral de Riemann (para una integral definida) de  $f$  en el intervalo dado puede ser determinado.

Usando el límite de sumas inferior figura 1 y superior figura 2 si estas convergen para cualquier partición del intervalo además estas dan resultados iguales entonces se tiene:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a + i\Delta x) \Delta x \quad (1)$$

parábola figura 1 y 2., se observan las sumas inferior y superior de Riemann Georg Friedrich Bernhard.

Otra representación geométrica de la suma de Riemann para una función positiva se encuentra en Riemann sums for generalized integrals. The College Mathematics Journal. Truc, (2019).



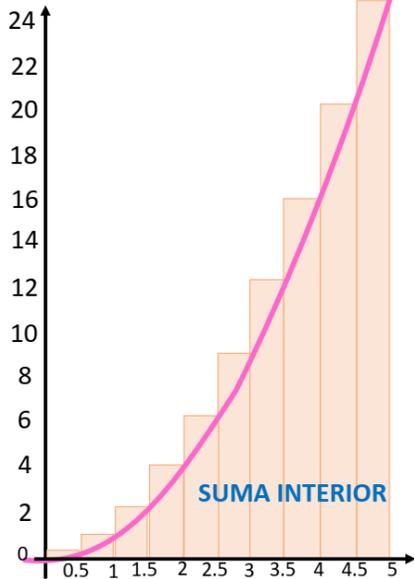


Figura 1.- Muestra las sumas de Riemann con la altura inferior

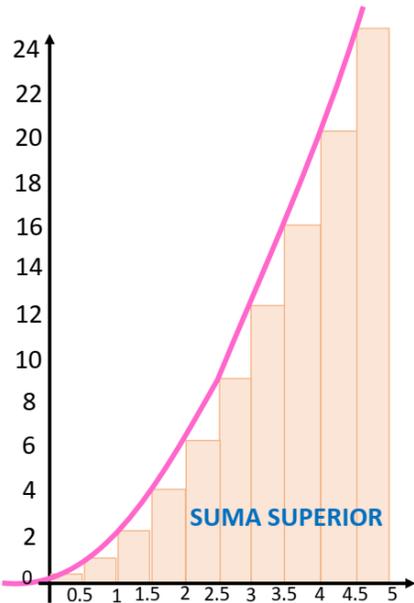


Figura 2.- Muestra Las sumas de Riemann con la altura superior

En el artículo Historical reflections on teaching the fundamental theorem of integral calculus. Bressoud, (2011), hace una reseña histórica del teorema fundamental del cálculo integral desde sus orígenes del siglo XVII hasta la formalización XIX, hasta su aparición en los textos en el siglo XX.

El teorema fundamental del cálculo integral:

Sea  $f$  una función continua en el intervalo  $[a, b]$  entonces

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \text{ para } a < x < b \quad (2)$$

y, si  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  realizara todo  $x \in [a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \quad (3)$$

La ecuación 1 se conoce como la primitiva o antiderivada del teorema fundamental del cálculo integral, porque muestra cómo usar la integral definida para construir una antiderivada. La ecuación 3 se conoce como la parte de evaluación del teorema fundamental del cálculo integral, muestra cómo usar la antiderivada para evaluar la integral definida.

En 1815 Carl Friedrich Gauss, publica Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi (Método nuevo de hallar por aproximación los valores de las integrales), en la que introdujo las reglas de cuadratura que hoy llevan su nombre. Para una explicación más amplia del artículo de la cuadratura gaussiana Gauss Sanz-Serna (2019) y (2018). La cuadratura de Gauss proviene del uso de las matemáticas de aproximar de área de una función utilizando pequeños cuadriláteros de forma irregular. En la actualidad hablar de cuadratura es sinónimo de integración, Carl Friedrich Gauss demostró que la integral dada una función polinomio de grado de  $2n-1$  se expresa como una suma de  $n$  términos., consultar artículo Ruohong Li Para derivar la regla de cuadratura se utiliza un conjunto de funciones ortogonales que forma una base para todo el conjunto de polinomios algebraicos dada por ecuación 1, si las funciones  $P_i(x)$  y  $P_j(x)$  son ortogonales en  $[a, b]$  respecto a la función peso  $\omega(x)$  si el producto  $P_i(x)P_j(x)\omega(x)$  es integrable en  $[a, b]$ , cumple, si  $P_i(x), P_j(x)$  son polinomios algebraicos cumplen que:

$$\int_a^b P_i(x)P_j(x)\omega(x) dx = \begin{cases} \text{diferente de cero si } i \neq j \\ 0 \text{ si } i = j \end{cases} \quad (4)$$

Gauss-Legendre, y lo hizo mediante un cálculo con fracciones continuas en 1814 el conjunto ortogonal de los polinomios de Legendre dados por la siguiente función de recurrencia, Tenemos que la Cuadratura Gaussiana es una combinación lineal de la función  $f(x)$  evaluada en las raíces de la  $n$ -ésima Legendre del polinomio dado por la ecuación (2).

$$\left\{ P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^{n+1} \right\} \quad (5)$$

La Figura 3. representa los polinomios de Legendre dados por la ecuación (5).

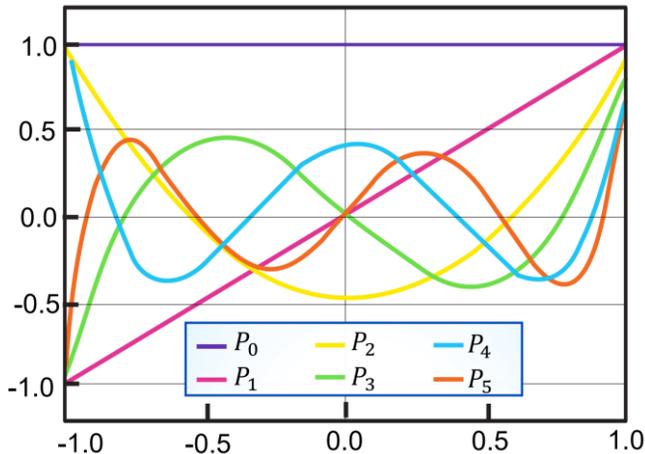


Figura 3.- Se observan las funciones para  $n = 5$  de los polinomios de Legendre

estas están definidas en el intervalo  $[-1,1]$  Para el cálculo de los nodos y pesos, se integran los polinomios en este intervalo. Carl Gustav Jacob descubrió una conexión entre la regla de cuadratura y la familia ortogonal de polinomios de Legendre Ecuación 5. Como no existe una fórmula de forma cerrada para los pesos y nodos de cuadratura, durante muchas décadas las personas solo pudieron usarlos a mano para  $n$  pequeños, para utilizarlo se hacían referencia haciendo a una tabla que contenían el peso y los valores de los nodos. En 1942, estos valores solo se conocían hasta  $n = 16$  más- Los usos más constantes de las computadoras han tenido un progreso para los algoritmos utilizados para problemas que no se han podido resolver analíticamente, cuadratura de Gauss viene dada por la ecuación (6).

$$G_n(f) = \sum_{i=1}^n w_i^{(n)} f(x_i^{(n)}) \approx \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (6)$$

El error de truncamiento para el método de integración numérica de Gauss se puede encontrar en su trabajo de Iqbal, (2016) para dos nodos viene dado por:

$$E_2(f) = \frac{f^4(c)}{135}, c \in [-1,1] \quad (7)$$

Esta es solo para el cálculo de un área con dos pesos y dos nodos. Realizando un cambio de variable del intervalo  $[-1,1]$   $[a,b]$  dada por la ecuación (8):

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} \quad (8)$$

Así que la integral de la ecuación (6) se convierte en:

$$I = b \int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 \left( \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} \right) \frac{b-a}{2} dt \quad (9)$$

El área aproximada de la ecuación (9) viene dada por la ecuación (10):

$$A_1 = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{(b-a)x_i + (b+a)}{2}\right) w_i \quad (10)$$

Donde  $n$  es el número de puntos que se utilizarán  $w_i$ ,  $n$  los pesos,  $x_i$  son los nodos que son calculados de los polinomios respectivos

Al utilizar el cambio de variable afecta por  $\frac{b-a}{2}$  error en este caso por.

$$I(j) - G_n(f) = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]} f^{(2n)}(\eta_c) \quad (11)$$

El error de truncamiento aproximado se puede escribir de la siguiente manera.

$$E = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4 f^{(2n)}(\xi_n)}{(2n+1)[(2n)!]^3} \quad a < \xi_n < b \quad (12)$$

Tabla 1.- Muestra los pesos y nodos utilizados en la integración de Gauss.

Número	Nodo	Peso
1	-0.577350269	1
2	0.577350269	1
Número	Nodos	Pesos
1	-0.774596669	0.555555556
2	0	0.888888889
3	0.774596669	0.555555556
Número	Nodos	Peso
1	-0.861136312	0.347854845
2	-0.339981044	0.652145155
3	0.339981044	0.652145155
4	0.861136312	0.347854845
Número	Nodo	Peso
1	-0.906179846	0.236926885
2	-0.53846931	0.47862867
3	0	0.568888889
4	0.53846931	0.47862867
5	0.906179846	0.236926885
Número	Nodo	Peso
1	-0.960289856	0.101228536
2	-0.796666477	0.222381034
3	-0.52553241	0.313706646



4	-0.183434642	0.362683783
5	0.183434642	0.362683783
6	0.52553241	0.13706646
7	0.796666477	0.222381034
8	0.960289856	0.101228536
Número	Nodo	Peso
1	-0.989400935	0.027152459
2	-0.944575023	0.062253524
3	-0.865631202	0.095158512
4	-0.755404408	0.124628971
5	-0.617876244	0.149595989
6	-0.458016778	0.169156519
7	-0.281603551	0.182603415
8	-0.09501251	0.18945061
9	0.09501251	0.18945061
10	0.281603551	0.182603415
11	0.458016778	0.169156519
12	0.617876244	0.149595989
13	0.755404408	0.124628971
14	0.865631202	0.095158512
15	0.944575023	0.062253524
16	0.989400935	0.027152459

En la Tabla 1.- se muestran Nodos y pesos para 2,3,4,5,8,16. Se realizan las siguientes aplicaciones utilizando integración analítica para obtener la solución verdadera y de esta manera compararla con el método de Gauss con dos nodos y dos pesos, hasta 16 nodos y cinco pesos.

- $\int_0^{\pi} \text{seno}(x) dx = 2$  se Muestran dos nodo y dos pesos en la figura 4.
- $\int_0^{\pi} \text{seno}(20x) dx = -0.1$
- $\int_0^1 x^{10000} dx = \frac{1}{10001} = 9.99900009999000099990000999900001e-5$



Figura 4.- se observan los valores de dos nodos y dos pesos.



Figura 5.- Se observan los valores de tres nodos y tres pesos



Figura 6. Se observan los valores de cuatro nodos y cuatro pesos

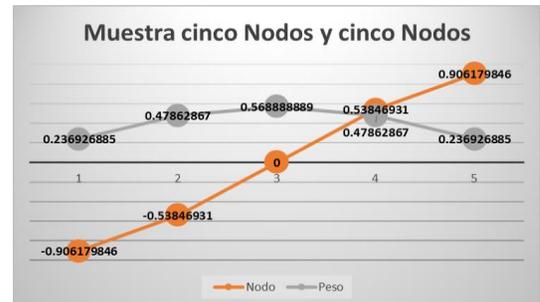


Figura 7.- Se observan los valores de cinco nodos y cinco pesos

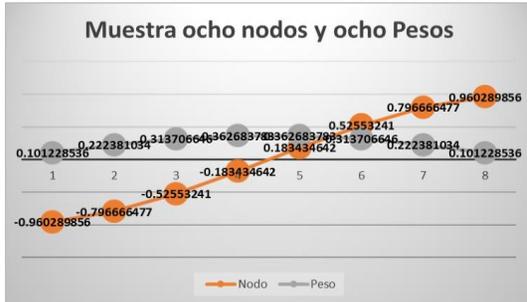


Figura 8.- Se observan los valores de ocho nodos y ocho pesos



Figura 9. Se observan los valores de dieciséis nodos y dieciséis pesos

### APLICACIÓN 1

La Figura 10. Se muestra el área bajo la curva a integrar

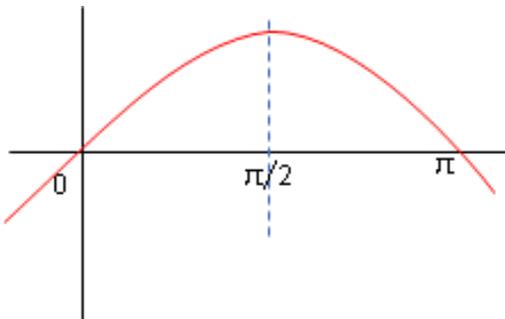


Figura 10.- representa el área bajo la curva en el intervalo de  $[0, \pi]$

Muestra los resultados de la aplicación 1, el área obtenida utilizando 2, 3, 4, 58,16 nodo y el mismo número de peso número de pesos.

Tabla 2.- Muestra el área en el intervalo  $[0, \pi]$ .

Número de nodos	Área aproximada	solución analítica	Error porcentual
Área con dos nodos	1.93582	2	3.209
Área tres nodos	2.364464	2	18.2232
Área cuatro nodos	1.999984	2	0.0008
Área cinco nodos	1.7482482	2	12.58759
Área ocho nodos	2	2	0
Área dieciséis nodos	2	2	0

La tabla 2 Muestra el área en el intervalo  $[0, \pi]$ . Área de  $f(x) = \text{seno}(x)$  en el intervalo  $[0, \pi]$ .

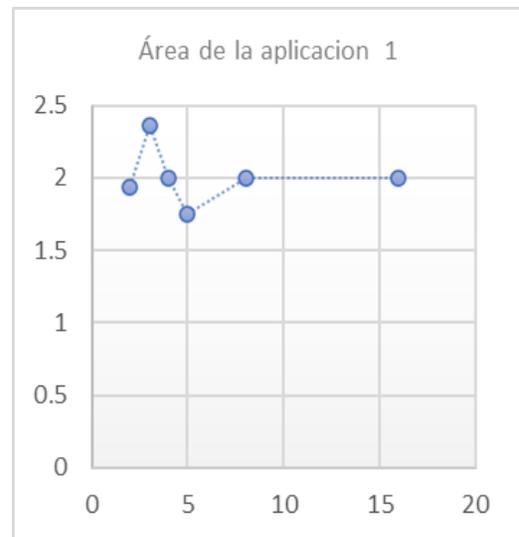


Figura 11.- Muestra el área obtenida utilizando 2, 3, 4, 5, 8, 16 nodos y pesos

### APLICACIÓN 2

El área de la función  $f(x) = \text{seno}(20x)$  en el intervalo  $[0, \pi]$ .

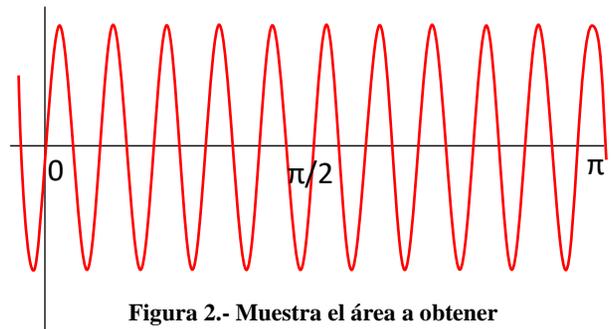


Figura 2.- Muestra el área a obtener



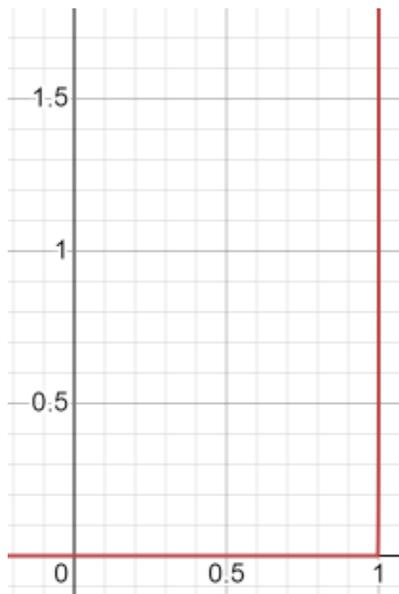
**Tabla 3.- datos obtenidos para la aplicación dos en el programa.**

Nodos	Área	Solución analítica	Error porcentual
2	0	-0.1	100
3	0.000003	-0.1	99.997
4	-0.000001	-0.1	99.999
5	0.355025	-0.1	455.025
8	-0.000002	-0.1	99.998
16	-0.000001	-0.1	999.99

La tabla 3. Muestra el área obtenida utilizando 2, 3, 4, 5,8,16 nodo, y pesos. Muestra los datos de las áreas de la aplicación 2 con 2,3,4,5,8,16 nodos y pesos.

**Tabla 4.- Muestra los datos de las áreas con 2,3,4,5,8,16 nodos y pesos en el intervalo  $[0, \pi]$ .**

NÚMERO DE NODOS	ÁREA APROXIMADA	SOLUCIÓN ANALÍTICA	ERROR PORCENTUAL
Área con dos nodos	0	9.9990000999900009999000099990001e-5	100
Área tres nodos	0.000003	9.9990000999900009999000099990001e-5	96.9997
Área cuatro nodos	-0.000001	9.9990000999900009999000099990001e-5	100.10001
Área cinco nodos	0.355025	9.9990000999900009999000099990001e-5	35.4925
Área ocho nodos	-0.000002	9.9990000999900009999000099990001e-5	102.0002
Área dieciséis nodos	-0.000001	9.9990000999900009999000099990001e-5	101.0001



**Figura 13.- Muestra el área de la aplicación 3 de la función**

Muestra los datos de la aplicación 3 de las áreas con 2,3,4,5,8,16 nodos y pesos.

**Tabla 5. Muestra los datos de las áreas con 2,3,4,5,8,16 nodos y pesos en el intervalo  $[0, \pi]$ .**

Número de nodos	Área aproximada	Solución analítica	Error porcentual
Área con dos nodos	0	0	indefinido
Área tres nodos	0.000003	0	indefinido
Área cuatro nodos	-0.000001	0	indefinido
Área cinco nodos	0.355025	0	indefinido
Área ocho nodos	-0.000002	0	indefinido
Área dieciséis nodos	-0.000001	0	indefinido

## RESULTADOS Y ANÁLISIS

Utilizando los métodos analíticos para resolver integrales puede ser a veces muy complejas o tediosas para obtener esta solución, en este artículo se utilizaron funciones que se pueden encontrar con un formulario, se utilizaron tres métodos numéricos a tres aplicaciones, en la aplicación se ve se va acercando con más nodos y abscisas al área de la solución real, según su porcentaje y comparado con la solución. Se observa que mientras aumenta de nodos y pesos se acerca más a la analítica, en la segunda el programa no distingue que hay áreas negativas así que no sabe que hacer dando valores no deseables, por último, en la aplicación tres no se encontrara una buena aproximación debido que la potencia es muy grande el valor de los pesos y nodos tienden a cero.

## CONCLUSIONES

Hay en alguna literatura que han encontrado hasta, cien valores de estos, pero para la aplicación 2 y 3 esto no funciona, se tendría el mismo problema, así que para aplicar esta técnica de integración numérica hay que tener con cuidado con funciones trigonométricas que tengan un gran periodo, así como combinaciones de estas con potencias elevadas a un número muy grande. De esta forma se da una idea que también no es tan fácil utilizar este método.

## REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

- [1]. Bressoud, D. M. (2011). Historical reflections on teaching the fundamental theorem of integral calculus. The American mathematical monthly: the official journal of the Mathematical Association of America, 118(2), 99. <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.02.099>
- [2]. Iqbal, R., & Ahmad, M. O. (2016). Error Estimation of Numerical Integration Methods, Mathematical Theory and Modeling www.iiste.org (Vol. 6). Paper.
- [3]. Sanz-Serna, J. M. (2018). La cuadratura gaussiana según Gauss. Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid, Avenida de la Universidad 30, E-28911 Leganés (Madrid), 00(00), 10001–10006.
- [4]. Sanz-Serna, J. M. (2019). La cuadratura gaussiana según Gauss. 22, 101–116.
- [5]. Truc, J.-P. (2019). Riemann sums for generalized integrals. The College Mathematics Journal, 50(2), 123–132. <https://doi.org/10.1080/07468342.2019.1560119>



- [6]. Wang, R. L. H., & Tu, W. (Eds.). (2020). Gaussian Quadrature, See discussions, stats, and author profiles for this publication a.
- [7]. Wittmann, A. D. (2020). Carl Friedrich Gauss and the Gauss Society: a brief overview. *History of Geo- and Space Sciences*, 11(2), 199–205. <https://doi.org/10.5194/hgss-11-199-2020>

## INFORMACIÓN ACADÉMICA

**Esiquio Martín Gutiérrez Armenta:** Ingeniero Mecánico egresado de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Azcapotzalco del Instituto Politécnico Nacional. Grado de Maestro y Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica en la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Zacatenco. [emga@azc.uam.mx](mailto:emga@azc.uam.mx).

**Marco Antonio Gutiérrez Villegas:** Licenciatura y Maestría 100% créditos en Matemáticas en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional. grado de Maestro en Ciencias y Doctorado en Ingeniería Mecánica en el Instituto Politécnico Nacional de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Sección de Estudios de Posgrado e Investigación Unidad Zacatenco. [magv@correo.azc.uam.mx](mailto:magv@correo.azc.uam.mx)

**Alfonso Jorge Quevedo Martínez:** Ingeniero Industrial egresado de la Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Azcapotzalco. Cuenta con una maestría en Gestión Educativa y otra en Docencia, ambas por la Universidad ETAC campus Coacalco. [ajqm@azc.uam.mx](mailto:ajqm@azc.uam.mx)

**Israel Isaac Gutiérrez Villegas:** Grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería en Sistemas en la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Zacatenco. [ijgv@hotmail.com](mailto:ijgv@hotmail.com)

**José Alejandro Reyes Ortiz:** Doctorado en Ciencias de la Computación por el Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), Maestría en Ciencias de la Computación por el Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), Ingeniero en Sistemas Computacionales por el Instituto Tecnológico de Colima. [jaro@azc.uam.mx](mailto:jaro@azc.uam.mx).

**Josué Figueroa González:** Licenciatura en Ingeniería Electrónica en la Universidad Autónoma Metropolitana, Maestría en Ciencias de la Computación en la Universidad Autónoma Metropolitana. [jfgo@azc.uam.mx](mailto:jfgo@azc.uam.mx).

**María de Lourdes Sánchez Guerrero:** Licenciatura En Computación UAM-Azcapotzalco; Maestría En Ciencias De La Computación UAM-Azcapotzalco. [lsg@azc.uam.mx](mailto:lsg@azc.uam.mx).

**Javier Norberto Gutiérrez Villegas:** Grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería en Sistemas en la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Zacatenco.

