EM-04

Ecuación de Laplace con condiciones de frontera no homogéneas

Esiquio Martin Gutierrez Armenta**, Marco Antonio Gutiérrez Villegas*, Alfonso Jorge Quevedo Martínez **, Israel Isaac Gutiérrez Villegas *** y *, José Alejandro Reyes Ortiz*, María de Lourdes Sánchez Guerrero*, Josué Figueroa González* y Javier Norberto Gutiérrez Villegas******

RESUMEN

Este artículo tiene la finalidad de resolver la ecuación Pierre-Simón Laplace, dar una aplicación de esta, la cual es de segundo orden del tipo elíptico, en una regio cuadrada que se puede extender a un rectángulo de acuerdo a sus dimensiones, con sus cuatro condiciones diferentes de tipo Peter Gustav Lejeune Dirichlet, utilizando el uso del principio de superposición para descomponer el problema en cuatro problemas, mediante este principio las cuales serán resueltas por el método de variable separables o método de Jeam Baptiste Joseph Fourier, esta metodología se puede reproducirse a cualquier tipo que se utiliza en fenómenos físicos y químicos o en general rige los campos potenciales en regiones sin fuente. Por ejemplo, campos potenciales, como el campo el de atracción de la gravedad, campos eléctricos y electromagnéticos.

ABSTRACT

This article has the purpose of solving the Pierre-Simon Laplace equation, giving an application of it, which is of the second order of the elliptic type, in a regal square that can be extended to a rectangle according to its dimensions, with its four different conditions of the Peter Gustav Lejeune Dirichlet type, using the use of the superposition principle to break down the problem into four problems, using this principle which will be solved by the separable variable method or the Jeam Baptiste Joseph Fourier method, this methodology can be reproduced to any type that is used in physical and chemical phenomena or in general governs potential fields in regions without a source. For example, potential fields, such as the field of attraction of gravity, electric and electromagnetic fields.

Palabras claves: equation, variable, border, overlap

* UAM-Azcapotzalco, Departamento de Sistemas Área, Sistemas Computacionales. emga@azc.uam.mx Doctor, magv@azc.uam.mx Doctor, jaro@azc.uam.mx Doctor, jfgo@azc.uam.mx M. en C., lsg@azc.uam.mx M. en C.

**UAM-Azcapotzalco, Departamento de Administración, Área de Matemáticas y Departamento de Sistemas, Área Sistemas Computacionales. ajqm@azc.uam.mx M. en G. E.

***Tecnológico Nacional de México (TecNM)- Tecnológico de estudios superiores de Ecatepec (TESE)-División de ingeniería en sistemas computación. iigv@hotmail.com M. en C., jgutierrez@tese.edu.mx M. en C.

****IPN–Escuela Superior de Física y Matemáticas – Departamento de Ingeniería y Ciencias Sociales. iigv@hotmail.com M. en C.

INTRODUCCIÓN

Una de las primeras técnicas fue presentada por Bernoulli en 1953 que consista en encontrar la solución como una sumatoria que empezaba desde i=1 hasta ∞, se tiene una infinidad de coeficientes que eran multiplicada por senos y cosenos que dependían también de este índice que resolvían analíticamente la ecuación de la cuerda. Jean Baptiste Joseph Fourier presento el trabajo 1807 de transferencia de calor, UTN Facultad Regional Resistencia (2023), desarrollo el método de separación de variables Coleman (2005), Zill (2015), Snider. (2010). utilizando esta técnica resolvió el problema de transferencia de calor, con geometrías clásicas como: cuadrados, rectángulos, círculos, cilindros y esferas son obtenidos en su libro de Benjan (1993), pero otros problemas con una geometría combinada se tienen que resolver utilizando mapeo conforme Zill (2011).Para este se tiene que utilizar variable compleja, la solución analítica a veces son complicados, cuando se tienen condiciones de frontera no homogéneas, se utiliza el principio de superposición para resolver la ecuación de Laplace Pierre-Simon Laplace se Allan en M. Necati Ozisik (2013) para dos dimensiones en un Cuadrado pero no se realiza todo el desarrollo matemático, obteniendo este resultado se realiza un cambio de dimensiones de este para obtener la solución analítica de un rectángulo.

JUSTIFICACIÓN

Debido a la complejidad de los problemas en la mecánica del medio continuo, estas están modeladas la mayoría por ecuaciones diferenciales parciales, en dos o tres dimensiones, resultando el procedimiento más complejo para obtener una solución analítica, esto para topologías clásicas que se enseñan desde nuestros primeros cursos de geometría, pero para casos un poco más complicados se puede utilizar mapeo conforme para resolver el problema. Pero por lo general las geometrías del modelado son mucho más complejas en las cuales ya no es posible utilizar las técnicas anteriores entonces se deben aproximación a esta mediante métodos numéricos. estos deben ser validados con las soluciones analíticas. en el caso de complejidad geométrica alguno de estos métodos. Para este tipo de problemas es necesario que la solución este analizada por un experto en este tipo de problemas.

APLICACIÓN

Se utilizará el método de separación de variables y el principio de superposición para resolver el problema de conducción de calor en estado estable para un rectángulo finito con las siguientes dimensiones $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$. Las condiciones de frontera

Memorias del Congreso Científico Tecnológico de las carreras de
Ingeniería Mecánica Eléctrica, Industrial y Telecomunicaciones, sistemas y electrónica

AÑO 8. No. 8. ISSN-2448-7236. SEPTIEMBRE 2023 – AGOSTO 2024. EM-04, pág.: 1 a la 9.

se mantienen a diferentes temperaturas, las cuales son funciones de posición a lo largo de esta. El problema de conducción de calor de manera matemática con valores en la frontera viene dado por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

$$0\le x\le a \qquad 0\le y\le b \qquad (1)$$

Condiciones de frontera:

$$T(0,y)=f_1(y) \qquad x=0 \qquad 0\le y\le b \qquad (1a)$$

$$T(a,y)=f_2(y) \qquad x=a=L \qquad 0\le y\le b \qquad (1b)$$

$$T(x,0)=f_3(x) \qquad y=0 \qquad 0\le x\le a \qquad (1c)$$

$$T(a,y)=f_4(x) \qquad y=b=W \qquad 0\le x\le a \qquad (1d)$$

Donde $f_3(y)\,f_4(y)\in[0,a]$ y $f_1(y)\,f_2(y)\in[0,b]$ funciones continuas respectivamente en su intervalo. Se tiene que T=T (x, y) dependen de las variables x, y.

SOLUCIÓN

Por el principio de superposición separamos el sistema (1), con sus condiciones de frontera (1a, b, c, d) en cuatro problemas simples donde la solución general viene dada por (2).

$$T(x,y)=T_1(x,y)+T_2(x,y)+T_3(x,y)+T_4(x,y)\frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_4}{\partial y^2}=0 \qquad (2)$$

La figura 1 ilustra la descomposición del problema (1) con sus condiciones de frontera (1 a, b, c, d), en cuatro problemas menos complejos.

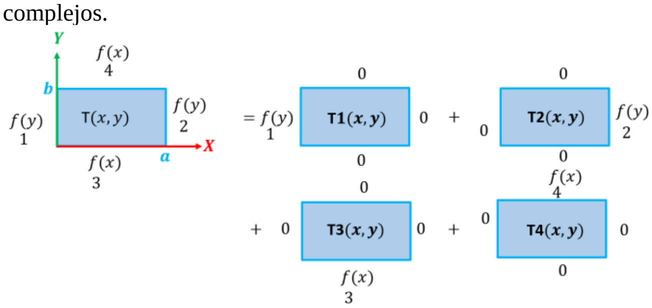

Figura 1.- Superposición aplicada a un rectángulo finito

Utilizando el principio de superposición se expresarán los cuatro casos en forma matemática con sus condiciones de frontera.

Formulación matemática del Caso 1

Donde la función $T_1(x,y)$ está representada como:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}=0$$

$$0\le x\le a=L \qquad 0\le y\le b=W \qquad (1.1)$$

Condiciones de frontera para este primer caso:

$$T_1(x,0)=0 \qquad 0<x<a=L \qquad (1.1\text{ a})$$

$$T_1(x,b)=0 \qquad 0<x<a=L \qquad (1.1\text{ b})$$

$$T_1(0,y)=f_1(y) \qquad 0<y<b=W \qquad (1.1\text{ c})$$

$$T_1(a,y)=0 \qquad 0<y<b=W \qquad (1.1\text{ d})$$

Formulación matemática del Caso 2

Donde la función $T_2(x,y)$ está representada como:

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}=0$$

$$0\le x\le a=L \qquad 0\le y\le b=W \qquad (2.1)$$

Condiciones de frontera para el caso 2.

$$T_2(x,0)=0 \qquad 0\le x\le a=L \qquad (2.1.\text{ a})$$

$$T_2(x,b)=0 \qquad 0\le x\le a=L \qquad (2.1.\text{ b})$$

$$T_2(b,y)=f_2(y) \qquad 0\le y\le b=W \qquad (2.1.\text{ c})$$

$$T_2(a,y)=0 \qquad 0\le y\le b=W \qquad (2.1.\text{ d})$$

Formulación matemática del Caso 3

Donde la función $T_3(x,y)$ se representa como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^3}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^3}=0$$

$$[0,a]X[0,b]0\le x\le a=L \qquad 0\le y\le b=W \qquad (3.1)$$

Condiciones de frontera para el caso 3.

$$T_3(x,0)=f_3(x) \qquad (3.1\text{ a})$$

$$T_3(x,b)=0 \qquad (3.1\text{ b})$$

$$T_3(0,y)=0 \qquad (3.1\text{ c})$$

$$T_3(x,y)=0 \qquad (3.1\text{d})$$

$$T_3(a,y)=0 \qquad (3.1\text{ e})$$

Formulación matemática del Caso 4

Donde la función se representa como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^4}=0$$

$$0\le x\le a=L \qquad 0\le y\le b=W \qquad (4.1)$$

Condiciones de frontera para el caso 4.

$$T_4(x,0)=0 \qquad 0\le x\le a=L \qquad (4.1\text{ a})$$

$$T_4(x,b)=f_4(y) \qquad 0\le x\le a=L \qquad (4.1\text{b})$$

$$T_4(b,y)=0 \qquad 0\le y\le b=W \qquad (4.1\text{c})$$

$$T_4(a,y)=0 \qquad 0\le y\le b=W \qquad (4.1\text{d})$$

AÑO 8. No. 8. ISSN-2448-7236. SEPTIEMBRE 2023 – AGOSTO 2024. EM-04, pág.: 1 a la 9.

Solución para el caso 1

Donde la función $T_1(x,y)$ está representada como:

$$\frac{\partial^2 T_1(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_1(x,y)}{\partial y^2}=0$$

$$0\le x\le a=L \qquad 0\le y\le b=W \tag{1.1}$$

Donde se debe de cumplir que $T_1(x,y)=X(x)Y(y)\neq 0$

Utilizando las condiciones de frontera del caso 1 que son 1a, 1b, 1c y 1d. Las ecuaciones diferenciales de segundo orden asociadas al sistema.

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2}+\lambda^2 Y=0\ ,\frac{d^2X(x)}{dx^2}-\lambda^2 X(x)=0\ ,\lambda^2>0 \tag{1.1.e}$$

Derivando dos veces parcialmente y separando variable se tiene $\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\lambda^2$.

$$\frac{d^2Y(x)}{dy^2}+\lambda^2 Y(y)=0\ ,\lambda^2>0 \tag{1.1.f}$$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}-\lambda^2 X(x)=0\ ,\lambda^2>0 \tag{1.1.g}$$

La solución de la ecuación (1.1.g), se debe llevar a una ecuación auxiliar, dada por $\alpha^2+\lambda^2=0$ así que las raíces de esta son $\alpha=\pm\lambda i$, la solución general es:

$$Y(y)=c_1 sen(\lambda y)+c_2 cos(\lambda y) \tag{1.1.h}$$

Utilizando $T_1(x,0)=T_1(a,y)=0$ se deduce que $Y(0)=Y(a)=0$ con estas condiciones de frontera para $Y(y)$ tiene soluciones diferentes de cero cuando $c_1\neq 0$, entonces $sen(\lambda a)=0$ de esta ecuación se obtienen los valores para que el seno sea igual a cero esto solo pasa cuando $\lambda a=n\pi T_4(x,y)$, $\lambda=\frac{n\pi}{a}$ de donde se obtienen los Eigenvalores y Eingenfunciones.

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{a} \quad ,Y_n(y)=sen\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \tag{1.1.i}$$

Para la ecuación (1.1.f) la ecuación auxiliar $\alpha^2-\lambda^2=0$ las soluciones son $\alpha=\pm\lambda$. la solución general es:

$$X(x)=c_1e^{\lambda x}+c_2e^{-\lambda x} \tag{1.1.j}$$

Para λ_n se tiene la solución para $X_n(x)$ como

$$X_n(x)=c_1e^{\lambda x}+c_2e^{-\lambda x}=c_1e^{\frac{n\pi}{a}x}+c_2e^{-\frac{n\pi}{a}x} \tag{1.1.k}$$

evaluando $X(0)$ se obtiene

$$X_n(0)=c_1e^{\lambda 0}+c_2e^{-\lambda 0}=c_1e^{\frac{n\pi}{a}0}+c_2e^{-\frac{n\pi}{a}}=c_1+c_2=0 \tag{1.1.m}$$

De donde:

$$c_1=-c_2 \tag{1.1.n}$$

se tiene que $Y(b)=0$ de estas nos interesan las $Y_n(y)$ que cumplan, donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias. Aplicando la condición de la ecuación 1.1.d. $X_n(x)=c_1e^{\frac{n\pi}{a}x}+c_2e^{-\frac{n\pi}{a}x}$ sumando y restando $e^{-\frac{n\pi b}{a}}$ de la siguiente manera.

$$X_n(x)=c_1e^{\frac{n\pi}{a}x}e^{-\frac{n\pi b}{a}}+c_1e^{\frac{n\pi}{a}x}e^{-\frac{n\pi b}{a}}$$

$$X_n(x)=c_1e^{\frac{n\pi}{a}x-\frac{n\pi b}{a}}+c_1e^{-\frac{n\pi}{a}x-\frac{n\pi b}{a}}$$

$$X_n(x)=c_1e^{\frac{n\pi(x-a)}{a}}+c_1e^{-\frac{n\pi(x-a)}{a}}$$

De las identidades del seno y coseno hiperbólico, $senh(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$, $cosh(x)=\frac{1}{2}\left(e^{-x}-e^{x}\right)$, así, $X_n(x)=c_1senh(x)+c_1\cosh(x)$, evaluando, $x=a=0$ se tiene $X_n(0)=c_1senh(0)+c_1\cosh(0)$, $senh(0)=0$ así que se conserva el termino $X_n(x)=c_1\cosh(x)=c_1e^{-\frac{n\pi(x-a)}{a}}$, $X_n(x)=c_1\text{senh}(x)=c_1e^{\frac{n\pi(x-a)}{a}}$ se puede tomar el *senh* o el *cosh*, solo hay que tener cuidado con los signos que arroje la sustitución, de esta se proponer otro valor constante que es $e^{\frac{n\pi b}{a}}$, sin pedida de generalidad ya que son constante, el producto de una constante por otra constante es contante se toma a c_1 como:

$$c_1=-c_2e^{-\frac{n\pi}{a}} \tag{1.1.o}$$

Donde

$$c_2=c_1e^{\frac{n\pi b}{a}} \tag{1.1.p}$$

Utilizando este término nos llevara a una función hiperbólica donde se involucra a $x=a\ \&y=b$ las cuales son las dimensiones de la placa. Sustituyendo la ecuación (1.1.o) y la ecuación (1.1.p) en la ecuación (1.1.k).

$$X_n(x)=\left(c_2e^{-\frac{n\pi b}{a}}e^{\frac{n\pi x}{a}}-c_1e^{\frac{n\pi b}{a}}e^{-\frac{n\pi x}{a}}\right) \tag{1.1.q}$$

$$\begin{aligned}X_n(x)&=\left(c_2e^{-\frac{n\pi b}{a}}e^{\frac{n\pi x}{a}}--c_1e^{\frac{n\pi b}{a}}e^{-\frac{n\pi x}{a}}\right)=\\&\left(-c_2e^{\frac{n\pi((x-b)}{a}}+c_1e^{-\frac{n\pi((x-b)}{a}}\right)=\end{aligned} \tag{1.1.r}$$

De donde de la ecuación (1.1.n) $-c_1 = c_2$

$$X_n(x) = \left(-c_1 e^{\frac{n\pi(b-x)}{a}} + c_1 e^{-\frac{n\pi(b-x)}{a}} \right) = c_1 \left(e^{-\frac{n\pi(b-x)}{a}} - e^{\frac{n\pi(b-x)}{a}} \right) = \tag{1.1.s}$$

De la identidad del seno hiperbólico $senh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, el medio es integrado a la constante.

$$X_n(x) = c_n senh\left(\frac{n\pi(b-x)}{a} \right) \tag{1.1.t}$$

La solución

$$T_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n senh\left(\frac{n\pi(b-x)}{a} \right) sen\left(\frac{n\pi y}{a} \right) \tag{1.1.u}$$

Para satisfacer la condición de frontera no homogénea de la ecuación (1.1.a)

$$T_1(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n senh\left(\frac{n\pi(b-x)}{a} \right) sen\left(\frac{n\pi y}{a} \right) = f_1(y) \tag{1.1.v}$$

Se puede también utilizar $a = L, b = W$, donde $c_n senh\left(\frac{n\pi b}{a} \right)$ son los coeficientes de la serie de Fourier, de la función senos $f_1(y)$ para esto se desarrolla este alrededor de $x = 0$. Donde:

$$c_n senh\left(\frac{n\pi b}{a} \right) = \frac{2}{a} \int_0^L f_1(y') sen\left(\frac{n\pi y'}{L} \right) dy \tag{1.1.w}$$

despejando a c_n para $c_n = 1, 2..\infty$ da por la ecuación (1.1.x)

$$c_n = \frac{2}{L\, senh\left(\frac{n\pi b}{a} \right)} \int_0^L f_1(y') sen\left(\frac{n\pi y'}{L} \right) dy' \tag{1.1.x}$$

Sustituyendo ecuación (1.1.x) en la ecuación (1.1.v) la solución de este caso 1. Tomando L=a, Viene dado por.

$$T_1(x,y) = \frac{2}{L\, senh\left(\frac{n\pi b}{L} \right)} \sum_{n=1}^{\infty} senh\left(\frac{n\pi(b-x)}{L} \right) \int_0^L f_1(y') sen\left(\frac{n\pi y'}{L} \right) dy' \tag{1.1.y}$$

Solución para el caso 2

Donde la función $T_2(x,y)$ está representada como:

$$\frac{\partial^2 T_2(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

$$0 \le x \le a = L \qquad 0 \le y \le b = W \tag{2.1}$$

Donde se debe de cumplir que $T_2(x,y) = X(x)Y(y) \neq 0$.

En las Condiciones de frontera para el caso 2 que son 2a, 2b, 2c y 2d. Derivando dos veces parcialmente y separando variable se tiene.

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda^2$$

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden asociadas al sistema.

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0, \frac{d^2X(x)}{dx^2} + \lambda^2 X(x) = 0, \lambda^2 > 0 \tag{2.1. e}$$

$$\frac{d^2Y(x)}{dy^2} - \lambda^2 Y(y) = 0, \lambda^2 > 0 \tag{2.1.f}$$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \lambda^2 X(x) = 0, \lambda^2 > 0 \tag{2.1.g}$$

La solución de la ecuación (2.1.g), se debe llevar a una ecuación auxiliar, dada por $\alpha^2 + \lambda^2 = 0$ así que las raíces de esta son $\alpha = \pm\lambda i$, la solución general es:

$$Y(y) = c_1 sen(\lambda y) + c_2 cos(\lambda y) \tag{2.1.h}$$

Utilizando $T_2(x,0) = T_2(x,b) = 0$ se deduce que $Y(0) = Y(b) = 0$ con estas condiciones de frontera para $Y(y)$ tiene soluciones diferentes de cero cuando $c_1 \neq 0$, entonces $sen(\lambda a) = 0$ de esta ecuación se obtienen los valores para que el seno sea igual a cero esto solo pasa cuando $\lambda b = n\pi$, $\lambda = \frac{n\pi}{b}$ de donde se obtienen los eingenvalores y eingenfuciones.

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{b}, Y_n(y) = sen\left(\frac{n\pi y}{b} \right), para\, n = 1, 2, \ldots \tag{2.1.i}$$

Para la ecuación (2.1.f) la ecuación auxiliar $\alpha^2 - \lambda^2 = 0$ las soluciones son $\alpha = \pm\lambda$ la solución general es:

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x} \tag{2.1.j}$$

Para λ_n se tiene la solución para $X_n(x)$ como

$$X_n(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x} = c_1 e^{\frac{n\pi}{b}x} + c_2 e^{-\frac{n\pi}{b}x} \tag{2.1.k}$$

evaluando $X(0)$ se obtiene

$$X_n(0) = c_1 e^{\lambda 0} + c_2 e^{-\lambda 0} = c_1 e^{\frac{n\pi}{a}0} + c_2 e^{-\frac{n\pi}{a}} = c_1 + c_2 = 0 \tag{2.1.m}$$

De donde

$$c_1 = -c_2 \tag{2.1.n}$$

Ahora aplicando la condición $T_2(0,b) = 0$ se tiene que $Y(b) = 0$ de estas nos interesan las $Y_n(y)$ que cumplan, donde

AÑO 8. No. 8. ISSN-2448-7236. SEPTIEMBRE 2023 – AGOSTO 2024. EM-04, pág.: 1 a la 9.

c_1, c_2 son constantes arbitrarias. se proponer otro valor constante que es $e^{\frac{n\pi a}{b}}$, esto sin pedida de generalidad ya que son constante, el producto de una constante por otra constante es contante se toma a c_1 como:

$$c_1 = -c_2 e^{-\frac{n\pi}{b}} \tag{2.1.o}$$

Donde:

$$-c_2 = c_1 e^{\frac{n\pi a}{b}} \tag{2.1.p}$$

Utilizando este término nos llevara a una función hiperbólica donde se involucra la $x = a$ y $y = b$ las cuales son las dimensiones de la placa.

Sustituyendo la ecuación (2.1.o) y la ecuación (2.1.p) en la ecuación (2.1.k)

$$X_n(x) = \left(c_2 e^{-\frac{n\pi a}{b}} e^{\frac{n\pi x}{b}} - c_1 e^{\frac{n\pi a}{b}} e^{-\frac{n\pi x}{b}} \right)$$

$$X_n(x) = \left(-c_2 e^{-\frac{n\pi a}{b}} e^{\frac{n\pi x}{a}} - -c_1 e^{\frac{n\pi a}{b}} e^{-\frac{n\pi x}{b}} \right) = \tag{2.1.q}$$

$$\left(-c_2 e^{-\frac{n\pi((x-a)}{b}} + c_1 e^{\frac{n\pi((x-a)}{b}} \right) = \tag{2.1.r}$$

De donde de la ecuación (2.1.n) $-c_1 = c_2$

$$X_n(x) = \left(-c_1 e^{\frac{n\pi(a-x)}{b}} + c_1 e^{-\frac{n\pi(a-x)}{b}} \right) =$$

$$c_1 \left(e^{-\frac{n\pi(a-x)}{b}} - e^{\frac{n\pi(a-x)}{b}} \right) c_1 \left(e^{\frac{n\pi(a-x)}{b}} - e^{-\frac{n\pi(a-x)}{b}} \right) = \tag{2.1.s}$$

De la identidad del seno hiperbólico $senh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$, el medio es integrado a la constante.

$$X_n(x) = c_n senh\left(\frac{n\pi(a-x)}{b} \right) \tag{2.1.t}$$

La solución

$$T_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n senh\left(\frac{n\pi(a-x)}{b} \right) sen\left(\frac{n\pi y}{b} \right) \tag{2.1.u}$$

Para satisfacer la condición de frontera no homogénea de la ecuación (2.1.c)

$$T_2(b,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n senh\left(\frac{n\pi(a-b)}{b} \right) sen\left(\frac{n\pi y}{b} \right) = f_2(y) \tag{2.1.v}$$

Se puede también utilizar $b = W$, donde $c_n senh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)$ son los coeficientes de la serie de Fourier, de la función senos $f_1(y)$ para esto se desarrolla este alrededor de $y = 0$, donde

$$c_n senh\left(\frac{n\pi(a-b)}{b} \right) = \frac{2}{b} \int_0^W f_1(y') sen\left(\frac{n\pi y'}{W} \right) dy \tag{2.1.w}$$

, despejando a $c_n, para \quad c_n = 1, 2..\infty$ dada por la ecuación (2.1.w)

$$c_n = \frac{2}{W\, senh\left(\frac{n\pi(a-b)}{w} \right)} \int_0^W f_1(y') sen\left(\frac{n\pi y'}{L} \right) dy' \tag{2.1.x}$$

Sustituyendo ecuación (2.1.x) en la ecuación (2.1.v) la solución de este caso 2. Tomando W=b, Viene dado por.

$$T_2(x,y) = \frac{2}{W\, senh\left(\frac{n\pi(a-b)}{W} \right)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L f_2(y') sen\left(\frac{n\pi y'}{W} \right) dy' \tag{2.1.y}$$

Solución del caso 3.

Realizando análogo al anterior**.**

Donde la función $T_3(x,y)$ está representada como

$$\frac{\partial^2 T_3(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_3(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

$$0 \le x \le a = L \qquad 0 \le y \le b = W \tag{3.1}$$

Donde se debe de cumplir que $T_3(x,y) = X(x)Y(y) \ne 0$

Con las Condiciones de frontera para el tercer caso mencionadas en el primer parte que son 3a, 3b, 3c y 3d.

Observación: Derivando dos veces parcialmente y separando variable se tiene $-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda^2$

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden asociadas al sistema.

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0 \,, \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - \lambda^2 X(x) = 0 \,, \lambda^2 > 0 \tag{3.1. e}$$

$$\frac{d^2 Y(x)}{dy^2} + \lambda^2 Y(y) = 0 \,, \lambda^2 > 0 \tag{3.1.f}$$

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} - \lambda^2 X(x) = 0 \,, \lambda^2 > 0 \tag{3.1.g}$$

La solución de la ecuación (3.1.g), se debe llevar a una ecuación auxiliar, dada por $\alpha^2 + \lambda^2 = 0$ así que las raíces de esta son $\alpha = \pm\lambda i$, la solución general es:

$$X(x) = c_1 sen(\lambda x) + c_2 cos(\lambda x) \tag{3.1.h}$$

Utilizando $T_3(0,y) = T_3(a,y) = 0$ se deduce que $Y(0) = Y(a) = 0$ con estas condiciones de frontera para $Y_n(y)$ tiene soluciones diferentes de cero cuando $c_1 \neq 0$, entonces $sen(\lambda a) = 0$ de esta ecuación se obtienen los valores para que el seno sea igual a cero, esto solo se cumple cuando $\lambda a = n\pi$, $\lambda = \frac{n\pi}{a}$ de donde se obtienen los eigenvalores y eingenfuciones.

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{a} \quad , X_n(x) = sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right), para\, n = 1,2,\ldots \tag{3.1.i}$$

Para la ecuación (3.1.f) la ecuación auxiliar $\alpha^2 - \lambda^2 = 0$ las soluciones son $\alpha = \pm\lambda$ la solución general es:

$$Y(y) = c_1 e^{\lambda y} + c_2 e^{-\lambda y} \tag{3.1.j}$$

Para λ_n se tiene la solución para $Y_n(y)$ como

$$y_n(y) = c_1 e^{\lambda y} + c_2 e^{-\lambda} = c_1 e^{\frac{n\pi}{a}y} + c_2 e^{-\frac{n\pi}{a}y} \tag{3.1.k}$$

evaluando $X_n(0)$ se obtiene

$$X_n(0) = c_1 e^{\lambda 0} + c_2 e^{-\lambda 0} = c_1 e^{\frac{n\pi}{a}0} + c_2 e^{-\frac{n\pi}{a}} = c_1 + c_2 = 0 \tag{3.1.m}$$

De donde

$$c_1 = -c_2 \tag{3.1.n}$$

Ahora aplicando la condición $T_3(x,b) = 0$ se tiene que $Y(b) = 0$ de estas nos interesan las $Y_n(y)$ que cumplan, donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias. se proponer otro valor constante que es $e^{\frac{n\pi b}{a}}$, esto sin pedida de generalidad ya que son constante, el producto de una constante por otra constante es contante, se toma a c_1 como:

$$c_1 = -c_2 e^{-\frac{n\pi}{a}} \tag{3.1.o}$$

Donde:

$$c_2 = c_1 e^{\frac{n\pi b}{a}} \tag{3.1.p}$$

Utilizando este término nos llevara a una función hiperbólica donde se involucra la $x = a$ y $y = b$ las cuales son las dimensiones de la placa.
Sustituyendo la ecuación (3.1.o) y la ecuación (3.1.p) en la ecuación (3.1.k)

$$y_n(y) = \left(c_2 e^{-\frac{n\pi b}{a}} e^{\frac{n\pi y}{a}} - c_1 e^{\frac{n\pi b}{a}} e^{-\frac{n\pi y}{a}}\right) \tag{3.1.q}$$

$$y_n(y) = \left(c_2 e^{-\frac{n\pi b}{a}} e^{\frac{n\pi y}{a}} - -c_1 e^{\frac{n\pi b}{a}} e^{-\frac{n\pi y}{a}}\right) = \left(-c_2 e^{\frac{n\pi((y-b)}{a}} + c_1 e^{-\frac{n\pi((y-b)}{a}}\right) = \tag{3.1.r}$$

De donde de la ecuación (3.1.n) $-c_1 = c_2$

$$Y_n(y) = \left(-c_1 e^{\frac{n\pi(b-y)}{a}} + c_1 e^{-\frac{n\pi(b-y)}{a}}\right) = c_1\left(e^{-\frac{n\pi(b-y)}{a}} - e^{\frac{n\pi(b-y)}{a}}\right) = \tag{3.1.s}$$

De la identidad del seno hiperbólico $senh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, el medio es integrado a la constante-

$$Y_n(x) = c_n senh\left(\frac{n\pi(b-y)}{a}\right) \tag{3.1.t}$$

La solución

$$T_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n senh\left(\frac{n\pi(b-y)}{a}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{3.1.u}$$

Para satisfacer la condición de frontera no homogénea de la ecuación (1.1.c)

$$T_3(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n senh\left(\frac{n\pi(b-y)}{a}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = f_1(y) \tag{3.1.v}$$

Se puede también utilizar $a = L$, donde $c_n senh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$ son los coeficientes de la serie de Fourier, de la función senos de $f_3(x)$ para esto se desarrolla este alrededor de $x = 0$, donde

$$c_n senh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = \frac{2}{a}\int_0^L f_3(x') sen\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) dx' \tag{3.1.w}$$

, despejando a $c_n, para \quad c_n = 1,2..\infty$ dada por la ecuación (3.1.x).

$$c_n = \frac{2}{L\, senh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^L f_1(x') sen\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) dx' \tag{3.1.x}$$

Sustituyendo ecuación (3.1.x) en la ecuación (3.1.v) la solución de este caso 3. Tomando L=a, Viene dado por.

AÑO 8. No. 8. ISSN-2448-7236. SEPTIEMBRE 2023 – AGOSTO 2024. EM-04, pág.: 1 a la 9.

$$T_3(x,y)=\frac{2}{L\,senh\left(\frac{n\pi b}{L}\right)}\sum_{n=1}^{\infty} senh\left(\frac{n\pi(b-y)}{L}\right) \int_0^L f_3(x') sen\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)dx' \quad (3.1.y)$$

Solución para el caso 4.

Donde la función $T_4(x,y)$ está representada como

$$\frac{\partial^2 T_4(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_4(x,y)}{\partial y^2}=0$$

$$0\le x\le a=L \qquad 0\le y\le b=W \quad (4.1)$$

Donde se debe de cumplir que $T_2(x,y)=X(x)Y(y)\neq 0$ Condiciones de frontera para este cuarto caso que son 4a, 4b, 4c y 4d que se encuentran al inicio.

Derivando dos veces parcialmente y separando variable se tiene:

$$\frac{X''}{X}=\frac{Y''}{Y}=\lambda^2$$

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden asociadas al sistema.

$$\frac{d^2x(y)}{dx^2}+\lambda^2 X(x)=0\;,\frac{d^2X(x)}{dx^2}-\lambda^2 X(x)=0\;,\lambda^2>0 \quad (4.1.\ e)$$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}+\lambda^2 X(x)=0\;,\lambda^2>0 \quad (4.1.f)$$

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2}-\lambda^2 Y(y)=0\;,\lambda^2>0 \quad (4.1.g)$$

La solución de la ecuación (4.1.g), se debe llevar a una ecuación auxiliar, dada por $\alpha^2+\lambda^2=0$ así que las raíces de esta son $\alpha=\pm\lambda i$, la solución general es:

$$X(x)=c_1 sen(\lambda x)+c_2 cos(\lambda x) \quad (4.1.h)$$

Utilizando $T_4(x,0)=T_4(x,b)=0$ se deduce que $Y(0)=Y(b)=0$ con estas condiciones de frontera para $Y(y)$ tiene soluciones diferentes de cero cuando $c_1\neq 0$ entonces $sen(\lambda b)=0$ de esta ecuación se obtienen los valores para que el seno sea igual a cero esto solo pasa cuando $\lambda b=n\pi$, $\lambda=\frac{n\pi}{b}$ de donde se obtienen los eingenvalores y eingenfuciones.

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{b} \quad ,Y_n(y)=sen\left(\frac{n\pi y}{b}\right),\,para\,n=1,2,\ldots \quad (4.1.i)$$

Para la ecuación (4.1.f) la ecuación auxiliar $\alpha^2-\lambda^2=0$ las soluciones son $\alpha=\pm\lambda$ la solución general es:

$$X(x)=c_1e^{\lambda x}+c_2e^{-\lambda x} \quad (4.1.j)$$

Para λ_n se tiene la solución para $X_n(x)$ como

$$X_n(x)=c_1e^{\lambda x}+c_2e^{-\lambda x}=c_1e^{\frac{n\pi}{b}x}+c_2e^{-\frac{n\pi}{b}x} \quad (4.1.k)$$

evaluando $X(0)$ se obtiene

$$X_n(0)=c_1e^{\lambda 0}+c_2e^{-\lambda 0}=c_1e^{\frac{n\pi}{b}0}+c_2e^{-\frac{n\pi}{b}0}=c_1+c_2=0 \quad (4.1.m)$$

De donde

$$c_1=-c_2 \quad (4.1.n)$$

Ahora aplicando la condición $T_2(0,b)=0$ se tiene que $Y(b)=0$ de estas nos interesan las $Y_n(y)$ que cumplan, donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias. se proponer otro valor constante que es $e^{\frac{n\pi a}{b}}$, esto sin pedida de generalidad ya que son constante, el producto de una constante por otra constante es contante se toma a c_1 como:

$$c_1=-c_2e^{-\frac{n\pi a}{b}} \quad (4.1.o)$$

Donde

$$c_1=c_2e^{-\frac{n\pi a}{b}} \quad (4.1.p)$$

Utilizando este término nos llevara a una función hiperbólica donde se involucra la $x=a$ y $y=b$ las cuales son las dimensiones de la placa.

Sustituyendo la ecuación (4.1.o) y la ecuación (4.1.p) en la ecuación (4.1.k)

$$X_n(x)=\left(-c_2e^{-\frac{n\pi a}{b}}e^{\frac{n\pi x}{b}}-(-)c_2e^{\frac{n\pi a}{b}}e^{-\frac{n\pi x}{b}}\right) \quad (4.1.q)$$

$$X_n(x)=\left(-c_2e^{-\frac{n\pi a}{b}}e^{\frac{n\pi x}{b}}+e^{\frac{n\pi a}{b}}e^{-\frac{n\pi x}{b}}\right)=\left(-c_2e^{-\frac{n\pi((x-a)}{b}}+c_2e^{\frac{n\pi((x-a)}{b}}\right) \quad (4.1.r)$$

De donde de la ecuación (4.1.e)

$$X_n(x)=c_2\left(e^{\frac{n\pi(x-a)}{b}}-e^{-\frac{n\pi((x-a)}{b}}\right) \quad (4.1.s)$$

De la identidad del seno hiperbólico $senh(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$, el medio es integrado a la constante.

$$X_n(x)=c_n senh\left(\frac{n\pi(x-a)}{b}\right) \quad (4.1.t)$$

La solución

$$T_2\left(x,y\right)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n senh\left(\frac{n\pi\left(x-a\right)}{b}\right)sen\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \qquad (4.1.u)$$

Para satisfacer la condición de frontera no homogénea de la ecuación (2.1.c)

$$T_2\left(b,y\right)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n senh\left(\frac{n\pi\left(b-a\right)}{b}\right)sen\left(\frac{n\pi y}{b}\right)=f_4\left(x\right) \qquad (4.1.v)$$

Se puede también utilizar $b=W$, donde $c_n senh\left(\frac{n\pi\left(a-b\right)}{b}\right)$ son los coeficientes de la serie de Fourier, de la función senos $f_4\left(x\right)$ para esto se desarrolla este alrededor de $x=0$, donde

$$c_n senh\left(\frac{n\pi\left(a-b\right)}{b}\right)=\frac{2}{W}\int_0^W f_1\left(y'\right)sen\left(\frac{n\pi y´}{W}\right)dy \qquad (4.1.w)$$

despejando a c_n, *para* $c_n=1,2..\infty$ dada por la ecuación (4.1.w)

$$c_n=\frac{2}{W\,senh\left(\frac{n\pi\left(a-b\right)}{b}\right)}\int_0^W f_4\left(x'\right)sen\left(\frac{n\pi x´}{W}\right)dx´ \qquad (4.1.x)$$

Sustituyendo ecuación (4.1.x) en la ecuación (4.1.v) la solución de este caso 4. Tomando W=b, Viene dado por.

$$T_2\left(x,y\right)=\frac{2}{w\,senh\left(\frac{n\pi\left(b-a\right)}{b}\right)}\sum_{n=1}^{\infty}senh\left(\frac{n\pi\left(a-y\right)}{b}\right) \qquad (4.1.y)$$

$$sen\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\int_0^W f_2\left(x´\right)sen\left(\frac{n\pi x´}{W}\right)dy´$$

La solución general de la ecuación (2) donde se utilizó el principio de superposición la cual se descompuso en cuatro problemas viene dada por la ecuación (5):

$$T\left(x,y\right)=\frac{2}{W}\sum_{n=1}^{\infty}senh\left(\frac{n\pi x}{W}\right)sen\left(\frac{n\pi y}{W}\right)\int_0^w f_1\left(y'\right)sen\left(\frac{n\pi\ y'}{W}\right)dy'+$$

$$\frac{2}{W}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{senh\left(\frac{n\pi x}{W}\right)sen\left(\frac{n\pi y}{W}\right)}{senh\left(\frac{n\pi L}{W}\right)}\int_0^w f_2\left(y\right)sen\left(\frac{n\pi\ y'}{W}\right)dy'+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}sen\left(\frac{n\pi\ x}{L}\right)senh\left(\frac{n\pi\ y}{L}\right)\left[\int_0^L f_4\left(x'\right)sen\left(\frac{n\pi\ x'}{L}\right)dx'\right]+$$

$$\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen\left(\frac{n\pi\ x}{L}\right)senh\left(\frac{n\pi\ y}{L}\right)}{senh\left(\frac{n\pi\ W}{L}\right)}\left[\int_0^L f_4\left(x'\right)sen\left(\frac{n\pi\ x'}{L}\right)dx'\right]$$

CONCLUSIONES

Una de las formas sencilla pero procedimiento laboriosa de cálculo para este tipo de problemas, es el método separación de variables de Fourier, se puede utilizar la transformada de Laplace, pero este tiene un problema que cuando ya se tiene despejada la función transformada, se debe encontrar la función inversa de esta, por lo general hay dificultades ya que se requiere una buena habilidad en el cálculo transformada inversa, esta puede ser complicada para encontrarla, otra alternativa seria las técnicas numéricas por ejempló diferencias finita, elemento finito o elemento frontera. Pero estas soluciones obtenidas por estos métodos solo dan solución en unos puntos llamados nodos, y los anteriores son soluciones analíticas que sirven para obtener la solución en cualquier parte del modelo.

El resultado de este procedimiento se utilizará para realizar la validación de los métodos numéricos mencionados. Otro problema a resolver es cuando una de las caras de la frontera tiene condiciones de Neumann, esta condición es la derivada normal que no es otra cosa que la derivada direccional en la dirección normal a la superficie de la frontera correspondiente.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

[1]. Bejan, A. (1993). Heat Transfer. John Wiley and Sons (WIE).

[2]. Coleman, M. P. (2005). Anintroduction to partial Diferential Equations with Matlab, Editorial Chapman & Hall-CRC. 77–124.

[3]. Holman, J. P. (1990). Heat Transfer Seventh Edition. McGraw-Hill Inc.

[4]. Ozisik, M. N. (2013). Boundary value problems of heat conduction. Dover Publications.

[5]. R. Kent Nagle, Edward B. Saff, Arthur David Snider. (2010). Ecuaciones diferenciales con Valores en la Frontera, Quinta Edición (Vol. 145). Editorial Pearson.

[6]. UTN. (s/f). Facultad Regional Resistencia - UTN. Edu.ar. Recuperado el 18 de julio de 2023, de http://www.frre.utn.edu.ar/IIJCyT/clean/files/get/item/2178

[7]. Zill, D. G. (2005). Ecuaciones Diferenciales con Valores en la Frontera, octava edición, Grupo Editorial Cenge, Learning. 122.

[8]. Zill, D. G., & Shanalien, P. D. (2011). Introduccion al Analisis complejo con aplicaciones, segunda edición. Editorial Cenge, Learning, 352–389.

INFORMACIÓN ACADÉMICA

Esiquio Martín Gutiérrez Armenta: Ingeniero Mecánico egresado de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Azcapotzalco del Instituto Politécnico Nacional. Grado de Maestro y Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica en la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Zacatenco. emga@azc.uam.mx.

Marco Antonio Gutiérrez Villegas: Licenciatura y Maestría 100% créditos en Matemáticas en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional. grado de Maestro en Ciencias y Doctorado en Ingeniería Mecánica en el Instituto

AÑO 8. No. 8. ISSN-2448-7236. SEPTIEMBRE 2023 – AGOSTO 2024. EM-04, pág.: 1 a la 9.

Politécnico Nacional de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Sección de Estudios de Posgrado e Investigación Unidad Zacatenco. magv@correo.azc.uam.mx

Alfonso Jorge Quevedo Martínez: Ingeniero Industrial egresado de la Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Azcapotzalco. Cuenta con una maestría en Gestión Educativa y otra en Docencia, ambas por la Universidad ETAC campus Coacalco. ajqm@azc.uam.mx

Israel Isaac Gutiérrez Villegas: Grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería en Sistemas en la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Zacatenco. iigv@hotmail.com

José Alejandro Reyes Ortiz: Doctorado en Ciencias de la Computación por el Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), Maestría en Ciencias de la Computación por el Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), Ingeniero en Sistemas Computacionales por el Instituto Tecnológico de Colima. jaro@azc.uam.mx.

Josué Figueroa González: Licenciatura en Ingeniería Electrónica en la Universidad Autónoma Metropolitana, Maestría en Ciencias de la Computación en la Universidad Autónoma Metropolitana. jfgo@azc.uam.mx.

María de Lourdes Sánchez Guerrero: Licenciatura En Computación UAM-Azcapotzalco; Maestría En Ciencias De La Computación UAM-Azcapotzalco. lsg@azc.uam.mx.

Javier Norberto Gutiérrez Villegas: Grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería en Sistemas en la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Zacatenco. jgutierrez@tese.edu.mx.