



La clase de matemáticas y el producto interno en un espacio vectorial

Celina Elena Urrutia Vargas*, **Armando Aguilar Márquez***, **Miguel de Nazareth Pineda Becerril***,
Pedro Guzmán Tinajero**, **Víctor Hugo Hernández Gómez*****, **Omar García León***

RESUMEN

Los conceptos y principios de matemáticas son de gran importancia para el estudiante de nivel universitario que cursa una carrera de ingeniería estos conocimientos son una herramienta útil a lo largo de su formación profesional. Se presenta una propuesta a partir de la experiencia docente en la clase de álgebra. Iniciando con la identificación de la asignatura (se cursa en el primer semestre de Ingeniería Química en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM) y la redacción del objetivo: El alumno al término de la clase será capaz de analizar y comprender el producto interno entre dos vectores para utilizarlo en un problema de aplicación.

Lo siguiente es la realización. Elaboración del material didáctico con definiciones, fórmulas y problema de aplicación respetando de los autores la simbología utilizada para nombrar los vectores, se aplica una evaluación diagnóstica para saber los conocimientos que tiene el estudiante del tema, las estrategias didácticas que se utilizan son el aula invertida (para incorporar la tecnología se les envía a los alumnos las notas con el fin de que estudien con anterioridad antes de entrar a clase) y el aprendizaje situado (el estudiante tendrá una visión apegada a la realidad de los conocimientos que se le están transmitiendo) esto se logra con un problema de aplicación real donde utiliza el producto interno de dos vectores para calcular el ángulo entre éstos. Las técnicas didácticas son exposición, lectura didáctica, lluvia de ideas.

Finalmente se realiza la autoevaluación donde los alumnos reconocen sus logros y las dificultades para llegar al objetivo planteado en la clase con una actitud crítica y reflexiva.

Se llega a la conclusión que la clase tradicional no satisface los diferentes formas de pensar y sentir que tienen los alumnos, el profesor de matemáticas tiene que buscar nuevas estrategias didácticas para motivarlos y que logren vincular la nueva información con los conocimientos anteriores para lograr un aprendizaje significativo a largo plazo.

ABSTRACT

The concepts and principles of mathematics are very important for the university student that studies and engineering degree, these knowledges are a useful tool along their professional training. A proposal is presented though the teaching experience in algebra

lessons. Beginning with the identification of the subject (it is taken in the first semester of the chemistry engineering career at the Faculty of Higher Education (UNAM) Cuautitlán) and the writing of the aim lesson: The student at the ending of the class will be able to analyze and understand the internal product between two vectors, to use it in an application problem. The next step is the realization. Making the didactic material with definitions, formulas and application problems, respecting the symbology of the authors, used to name the vectors, it is applied a diagnostic evaluation to know the knowledges that the students have about the theme, the didactic strategies that are used are the flipped classroom (in order to incorporate the technology, the class notes are sent to the students, so they can study before the class), and the situated learning (the student will have a vision attached to reality with the knowledges that are being transmitted) this is achieved with a problem that can be applied to reality, where the internal product of two vectors is used to calculate the angle between them) the didactic techniques that are used are exposition, didactic reading, brainstorming. Finally, the self-assessment is carried on, where the students recognize their achievements and difficulties to reach the class aim with a critical and reflective attitude. The conclusions that the traditional class doesn't satisfy the different ways of feeling and thinking that the students have, the math teacher has to look for new didactic strategies to motivate the students, so they can manage to link the new information with the previous knowledges, to achieve a long-term meaning knowledge.

Palabras claves: Producto interno, ángulo, espacio vectorial, planeación didáctica.

INTRODUCCIÓN

EL trabajo docente en el aula universitaria es una tarea esencial para el profesor de matemáticas, es arduo cuando planea su curso, por el papel que desempeña en la enseñanza, además es de gran importancia y utilidad para sus estudiantes que cursan una carrera de ingeniería. El maestro está consciente de que en clase tiene poco tiempo y mucho material por enseñar además de mediar entre el alumno que aprende y los contenidos que trata de comunicar, acompaña a sus alumnos en el proceso de búsqueda, construcción y aplicación del conocimiento. Su experiencia en la impartición de

UNAM, Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán,
celinaelena@yahoo.com.mx* Depto. Matemáticas. **Depto.
Física, ***Depto. Ingeniería. Los autores tienen grado de doctor.
EM-01:5 DE 5





clase le ayuda a continuar con la búsqueda de una solución para mejorar el aprendizaje significativo en su curso “El profesor, a partir de su experiencia concreta, observa y reflexiona acerca de las variables que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje (variables del profesor, del alumno, del currículum y de la institución) y las integra” (Rueda y Díaz,2006).Al conocer al alumno le ayuda como refiere Arnaz (2001) “Entre las características de los educandos, que más se reconocen como significativas en los procesos de enseñanza-aprendizaje, están: la edad, la escolaridad, la situación económica”(p.23).En la planificación de su clase tiene que identificar el nombre de la asignatura, el semestre en que se imparte, el plan de estudios de la carrera. Además, tiene que tomar en cuenta las características de su grupo de alumnas y alumnos, sus edades, su contexto, para saber sus conocimientos con los que llegan, realiza una evaluación diagnóstica con el propósito de reafirmar lo que el alumno ya sabe de los contenidos que enseñará, revisar el temario de la asignatura y cómo abordará los temas, los recursos con que cuenta, las estrategias que utilizará y como evaluará. Ahora bien el compromiso de educar lo compromete a pensar como cita González (1999) “En nuestros diseños, los profesores y profesoras vamos a pensar y racionalizar la enseñanza y el aprendizaje-nuestros saberes teóricos y prácticos sobre éstos-y los requerimientos de una disciplina o materia específica (matemáticas, física, literatura...)”(p.20).A continuación se presenta una experiencia docente en la clase de matemáticas concretamente en álgebra que se imparte en el primer semestre de Ingeniería Química en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM.

ANTECEDENTES

La reflexión de la situación didáctica en el aula conduce como señalan (Parra y Saiz,2005) “La finalidad de la Didáctica de Matemáticas es el conocimiento de los fenómenos y procesos relativos a la enseñanza de la Matemática para controlarlos y a través de ese control optimizar el aprendizaje de los alumnos” (p.17).En el salón de clase el profesor debe trabajar con todo el grupo y al mismo tiempo dar atención a cada miembro, una forma de conseguir esto es según Ainscow(2001) “A menudo, la forma de conseguir todo esto consiste en presentar tareas de resolución de problemas, minuciosamente planeadas con el fin de animar e incluso exigir la exploración y aplicación de lo que se está enseñando”(p.27). Hoy en día los maestros se entusiasman con la idea del cambio en su clase como cita Estévez (2002) “En primer lugar hay que replantear la figura del profesor, no hay que concebirlo como mero ejecutor de planes y programas de estudio” (p.19) y se animan a explorar para tener la atención de sus alumnos y evitar la pregunta ¿por qué es tan aburrida la clase de matemáticas? En palabras de Zarzar (2015) “El trabajo de los profesores debería ser radicalmente diferente a la manera tradicional de impartir clases. La manera de estructurar la clase, las actividades a realizar durante la misma, el modo de trabajar en equipos, los esquemas de evaluación, etcétera” (p. xxii).Hay que recordar que algunos profesores en especial los de nivel superior no tienen formación específica para la docencia y se toman en serio su capacitación docente como se cita en Ferreiro (2013) “Comenius (Jan Amos Comensky) (1592-1670) sostuvo que

el maestro aprende mientras enseña y el alumno enseña mientras aprende. Toda su reconocida obra Didáctica Magna refleja una filosofía educativa en la que tanto maestro como alumno son enseñantes y aprendices” (p.23). En general en el aula donde se imparte la clase de álgebra se construyen fundamentos sólidos para la elaboración de modelos que le sirven al estudiante de ingeniería para describir fenómenos relacionados su la carrera.

DESARROLLO

La propuesta tiene el sustento en la experiencia docente y las vivencias en clase de álgebra de Ingeniería Química, la meta es cambiar la impartición de la clase tradicional a una más dinámica, en donde se aplique la función tutorial o guía del profesor. Con la inquietud de alejarse de la clase rutinaria como cita Ávila (2006) “Se supone que el profesor tradicional acepta escasas responsabilidades: transmitir u ostentar las nociones, repetir, ejercitar; que no asume la responsabilidad efectiva de que sus alumnos aprendan” (p.303).La asignatura es una base importante para los alumnos de ingeniería como cita Solow (2011) “Mal harían los maestros de educación superior en justificar sus propias fallas imputándolas a las deficiencias en los planes de estudio de educación media. Hoy en día las matemáticas gozan del reconocimiento generalizado como materia de importancia fundamental” (p.10).

Se inicia la planificación didáctica con la identificación de la asignatura, en función de la sesión de trabajo que es la clase de álgebra (la materia tiene asignadas 5 horas por semana) el profesor dosifica la información que debe transmitir durante su labor de expositor, trasmisor y acompañante del proceso enseñanza aprendizaje y propiciar actitudes positivas, en Hernández (2008) se cita “Durante la situación didáctica el profesor propicie un clima de respeto en el que se pueda opinar con libertad sobre los contenidos o ideas que sugiera el profesor y/o los alumnos” (p.203). Se obtiene del plan de estudios de la carrera el temario de álgebra (Plan de Estudios de la carrera de Química/2004. FESC, 2023) que en el apartado número 11 indica Espacios con producto interno y es el subtema a tratar.

Objetivo: El alumno al término de la clase será capaz de analizar y comprender el producto interno entre dos vectores para utilizarlo en un problema de aplicación. Éste se establece términos de lo que se espera que logren los alumnos.

En la realización se desarrolla la elaboración del material didáctico con definiciones, fórmulas y problema de aplicación respetando de los autores la simbología utilizada para nombrar los vectores, se aplica una evaluación diagnóstica, trabajando además la oralidad para saber los conocimientos que tiene el estudiante del tema mediante esta actividad se puede indagar su aprendizaje previo sobre el producto interno de vectores y así construir el significado nuevo. Las estrategias didácticas que se utilizan son el aula invertida (para incorporar la tecnología se les envía a los alumnos las notas con el fin de que estudien con anterioridad antes de entrar a clase) y el aprendizaje situado (el estudiante tendrá una visión apegada a la realidad de los conocimientos que se le están transmitiendo esto se logra con un problema de aplicación real donde utiliza el producto interno de dos vectores para calcular el ángulo entre éstos. Las técnicas didácticas son exposición, lectura didáctica, lluvia de ideas,



(con el propósito de estimular la creatividad individual y grupal). El material que se presenta en la exposición por parte del profesor para enseñar la secuencia de los contenidos iniciando de lo simple a lo complejo, explica cada concepto demuestra los pasos a seguir tratando de estimular la motivación del estudiante para que les ayude a comprender la utilidad de lo que se está trabajando, se inicia con las definiciones, aplicación y sustitución de fórmulas hasta el resultado. Al presentarle al alumno el problema de aplicación se concuerda con Moreno (1993) “El propósito de este tipo de aprendizaje es que las personas se capaciten para resolver adecuadamente el tipo de problemas que enfrentan, analizan y resuelven durante su formación” (p.65). De acuerdo con lo que refiere Pozo (2008) “Dado que aprender implica cambiar y la mayor parte de los cambios en nuestra memoria precisan una cantidad de práctica, aprender, sobre todo de modo explícito o deliberado, supone un esfuerzo que requiere buenas dosis de motivación” (p.321). Se trabaja de una manera distinta en el salón de clase, como cita Lozano (2009) “En una clase de matemáticas se pide a los alumnos que elaboren la representación mental de un problema o que imaginen la situación y que traten de clarificar los detalles” (p.14). El ejercicio o problema que se plantea tiene como finalidad lo citado en Polya (2005) “Pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello” (p.5), se inicia la exposición con la definición “Un espacio vectorial real V es un conjunto de objetos, denominados vectores, junto con dos operaciones binarias llamadas suma y multiplicación por un escalar” (Grossman y Flores, 2019). De los productos vectoriales el que se aborda en clase es el producto interno también llamado punto y escalar dando como resultado un número o un escalar. El producto interno tiene una aplicación es en el cálculo del trabajo según Bolívar (1986), “Por definición el trabajo efectuado es igual al producto de la fuerza por la distancia, esto se denota” (p.51)

$$W = f \cdot d \dots\dots (1)$$

(es importante mencionar que cada autor utiliza diferente simbología para la representación de los vectores).

La definición del producto interno de dos vectores según Curtis (1979) “Si $A = (a_1, \dots, a_n)$ y $B = (b_1, \dots, b_n)$, entonces el producto interno de A y B, denotado por (A, B) está definido por la fórmula” (p.31)

$$(A, B) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \dots\dots (2)$$

Además “Se obtiene multiplicando todos los pares (a_j, b_j) de las componentes de los dos vectores a y b que ocupan el mismo lugar y luego sumando los resultados.” (Knut et al, 2012)

Otra ecuación que se necesita es “Forma alternativa del producto punto de dos vectores” en (Zill y Dewar, 2012)

$$u \cdot v = |u| |v| \cos \theta \dots\dots (3)$$

Donde $\theta =$ es el ángulo entre los vectores $0 \leq \theta \leq \pi$

$|u| |v| =$ son las magnitudes de los vectores.

Podemos observar que el producto interior de dos vectores es igual al producto de sus normas por el coseno del ángulo que forman encontrar el ángulo entre dos vectores. Siguiendo a Polya Op.cit (2005) “Para resolver un problema se necesita:

- I. Comprender el problema.
- II Concebir un plan.
- III Ejecución del plan.
- IV Examinar la solución” (p.17).

Para comprender el problema se analizan los datos que nos proporcionan a continuación se presenta el problema planteado

Problema de aplicación: Encuentre el ángulo entre los vectores $u = (0,0,2)$ y $v = (-1,0,0)$

Se concibe un plan de acción mediante lluvia de ideas.

Se ejecuta el plan calculando el producto interno de los vectores, su magnitud y se utiliza la ecuación (3)

Solución:

Se despeja θ de la ecuación (3)

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{u \cdot v}{|u| |v|} \right) \dots\dots (4)$$

Se calcula el producto interno sustituyendo los valores de los vectores

$$u \cdot v = (0,0,2) \cdot (-1,0,0) \dots\dots (5)$$

$$= (0(-1) + 0(0) + 2(0))$$

$$= 0$$

Se calcula la norma o magnitud de los vectores

$$|u| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (2)^2} = 2 \dots\dots (6)$$

$$|v| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (0)^2} = 1 \dots\dots (7)$$

Se multiplican las magnitudes de los vectores

$$|u| |v| = (2)(1) = 2 \dots\dots (8)$$

Obteniendo el ángulo entre los dos vectores cuando se sustituyen en la ecuación (4)

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{u \cdot v}{|u| |v|} \right) \dots\dots (4)$$





$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{0}{2}\right) = 90^\circ \dots \dots \dots (9)$$

La respuesta es 90° el ángulo entre los vectores dados.

Se examina la solución revisando el razonamiento y comprobando el resultado.

Se reafirma lo aprendido con preguntas relevantes del tema por ejemplo ¿cómo despejaste el ángulo? ¿cómo se obtuvo la magnitud?

La evaluación del aprendizaje consiste en una autoevaluación de los alumnos de los conocimientos adquiridos donde reconocen sus logros y las dificultades para llegar al objetivo planteado en la clase con una actitud crítica y reflexiva.

CONCLUSIONES

Es de suma importancia la actualización del trabajo docente en el aula para lograr la atención de los alumnos. La clase tradicional no satisface las diferentes formas de pensar y sentir que tienen los alumnos, el profesor de matemáticas tiene que buscar nuevas estrategias didácticas para motivarlos y que logren vincular la nueva información con los conocimientos anteriores para lograr un aprendizaje significativo a largo plazo.

Se logra la motivación de los alumnos para la integración de los conocimientos del tema del producto de vectores y su aplicación (por los comentarios expresados en la clase y por las calificaciones obtenidas) dejando atrás un aprendizaje tedioso. El ejercicio que se plantea puede ser sencillo, pero si el alumno logra resolverlo logrará un conocimiento a largo plazo.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

- Ainscow, M. et al (2001). *Hacia una Enseñanza Eficaz en Crear Condiciones para la Mejora del Trabajo en el Aula (Manual para la Formación del Profesorado)*. Madrid: Editorial Narcea, p.27
- Arnaz, J. (2001). *La planeación curricular*. México: Editorial Trillas, octava reimpresión, p.23
- Ávila, A. (2006). *Transformaciones y costumbres en la matemática escolar*. México: Editorial Paidós Educador, p.303
- Bolívar, H. (1986). *Vectores y el Espacio Euclidiano Tridimensional*. México: UNAM. Facultad de Química, p.51
- Curtis, P. (1979). *Cálculo de varias Variables con Álgebra Lineal*. México: Editorial Trillas, p.31
- Estévez, E. (2002). *Enseñar a Aprender Estrategias Cognitivas*. México: Editorial Paidós Educador, reimp.2005, p.19
- Ferreiro, R. (2013). *El ABC del Aprendizaje Cooperativo: Trabajo en Equipo para Aprender y Enseñar*. México: Editorial Trillas, 2ª edición, p.23
- González, O. (1999). *El Trabajo Docente Enfoques Innovadores para el Diseño de un Curso*. México: Editorial Trillas, 2ª edición, p.20
- Grossman, S. Flores, J. (2019). *Álgebra Lineal*. México: Editorial Mc Graw Hill Interamericana, octava edición, p.286
- Hernández, G. (2008). *Paradigmas en psicología de la educación*. México: Editorial Paidós Educador, reimpresión, p.203

- Knut, S. Hammond, P. Carvajal, A. (2012). *Matemáticas para el Análisis Económico*. España: Editorial Pearson Educación, 2ª edición. p.326
- Lozano, A. (2009). *Estilos de Aprendizaje y Enseñanza un Panorama de la Estilística Educativa*. México: Editorial Trillas, 2ª edición, p.23
- Moreno, S. (1993). *Guía del Aprendizaje Participativo Orientación para Estudiantes y Maestros*. México: Editorial Trillas, reimpresión 2011, p.17
- Parra, C. Saiz, I. (2005). *Didáctica de matemáticas Aportes y Reflexiones*. Buenos Aires: Editorial Paidós Educador, p.17
- Polya, G. (2005). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. México: Editorial Trillas, p.17
- Pozo, J. (2008). *Aprendices y Maestros. La psicología cognitiva del aprendizaje*. España: Editorial Alianza, 2ª, p.321
- Rueda, M. y Díaz Frida. (2006). *Evaluación de la docencia. Perspectivas actuales*. México: Editorial Paidós Educador, p.341
- Solow, D. (2011). *Introducción al Razonamiento Matemático*. México: Editorial Limusa, 2ª edición, p.10
- Zarzar, C. (2015). *Planeación Didáctica por Competencias*. México: Editorial Patria, primera edición. p. xxii
- Zill, D. Dewar, J. (2012). *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*. México: Editorial Mc Graw Hill Educación, tercera edición, p.551

INFORMACIÓN EN LÍNEA

Plan de Estudios de la carrera de Química. Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. [En línea]. Obtenido en febrero de 2023 de la dirección:

https://www.cuautitlan.unam.mx/licenciaturas/quimica/descargas/1416_estadistica.pdf

INFORMACIÓN ACADÉMICA

Armando Aguilar Márquez: Ingeniero Químico Industrial por el Instituto Tecnológico de la Laguna, México, Máster y Doctor en Ingeniería por la Universidad Politécnica de Madrid. Responsable Académico del Diplomado “Enseñanza de las Matemáticas con el uso de las Nuevas Tecnologías”. Responsable Académico del Diplomado en Contaminación ambiental.

Miguel de Nazareth Pineda Becerril: Ingeniero Mecánico Electricista egresado de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM. Maestría en Ingeniería Metal Mecánica por la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM. Ponente en el Diplomado “Enseñanza de las Matemáticas con el uso de las Nuevas Tecnologías”.

Omar García León:

Licenciado en Administración Financiera por el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Maestría en Empresa en la Universidad de Barcelona, Doctor en la Universidad de Barcelona.

Pedro Guzmán Tinajero: Ingeniero Mecánico Electricista egresado de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM. Maestro en Administración Industrial por la Facultad de Química UNAM. Doctorado en Gestión Tecnológica e Innovación por la Universidad Autónoma de Querétaro.





Víctor Hugo Hernández Gómez: Ingeniero Mecánico electricista egresado de la Facultad de Estudios Cuautitlán UNAM, Maestro y Doctor en Ingeniería Orientación Energía en la DEPE UNAM. Responsable del laboratorio de Investigación en Energías Renovables.

Celina Elena Urrutia Vargas: Ingeniera Química Industrial, egresada del Instituto Politécnico Nacional. Maestría y Especialidad en Educación, Doctorado en Educación. Ponente en el Diplomado “Enseñanza de las Matemáticas con el uso de las Nuevas Tecnologías” módulo I. “Reconocimiento Sor Juana Inés de la Cruz año 2020”.

