



## Comparación del esfuerzo y la deformación entre las caras de dos placas en contacto unidas mediante un perno precargado

***Jesus Alberto Cruz Flores\**, *Juan Manuel Sandoval Pineda\*\**, *Luis Armando Flores Herrera\*\*\****

### RESUMEN

El propósito de un perno o un grupo de pernos es generar una fuerza de sujeción capaz de mantener unidos a todos los miembros del ensamble para evitar fugas, separaciones o deslizamientos entre los elementos. Dentro del diseño de las uniones apernadas uno de los factores a considerar es la rigidez de los elementos cuando el perno es precargado, ya que los elementos actúan como resortes de compresión en serie. Las fuerzas de compresión que actúan sobre los miembros del ensamble se distribuyen de tal manera que forman un cono, el cual es conocido como *cono de compresión* y su forma depende de las propiedades y especificaciones de los miembros del ensamble y del perno. En esta investigación, se presenta el análisis de la unión de dos placas mediante un perno precargado, el cual fue representado como un cuerpo sólido y como un cuerpo de línea. Como condición frontera se considera que una de las placas se encuentra restringida en su movimiento en los vértices inferiores. De este análisis, se presenta la comparación de los resultados analíticos (Teoría del cono de compresión) y los resultados numéricos (MEF, ANSYS™) de la deformación real y los esfuerzos en el ensamble y entre las caras en contacto de las placas para los dos modelos de perno propuestos. Este análisis permite la comprensión del fenómeno estudiado mediante la comparación y relación de los valores proporcionados por el método del elemento finito con los calculados analíticamente. De igual forma, muestra que la representación del elemento de sujeción como un elemento de línea puede disminuir el costo computacional con una correcta aproximación de los resultados, lo cual permite simplificar el diseño y simulación de estructuras o prototipos ensamblados mediante uniones apernadas.

### ABSTRACT

The purpose of a bolt or a group of bolts is to generate a force capable of holding together all the ensemble members to avoid leaks, separations, and slips between the members. In the design of bolted joints, one of the design factors to consider is the stiffness of the elements when the bolt is preloaded, due to the elements acting as compression springs in series. The compression forces that act over the ensemble members are distributed in such a way that it forms a cone known as a compression cone whose shape depends on the properties and specifications of the bolt and the members of the ensemble. This work shows the analysis of the joint of two plates through a bolted joint, which was represented as a solid body and line body. As a boundary condition, it was considered that one of the plates is restricted in its movement at the lower vertices. From this analysis, the comparison of the analytical (Compression Cone Theory) and numerical (MEF, ANSYS™) results of deformation and stresses in the assembly and between the faces in contact with the plates for the two models of proposed bolts are presented. This analysis allows us to understand the phenomenon studied by comparing and relating the values provided by the finite element method with those calculated analytically. In the same way, it shows that the representation of the bolted joint as a line element can reduce the computational cost with a correct approximation of the results, which allows simplifying the design and simulation of structures or prototypes assembled by bolted joints.

**Palabras claves:** Perno Precargado, Cono de Compresión, Campos de deformación y esfuerzo, Método del Elemento Finito

### NOMENCLATURA

$k$  = Relación de resorte o rigidez, N/m  
 $F_i$  = Precarga del perno, N  
 $\delta$  = Desplazamiento o elongación, mm  
 $E$  = Módulo de Young, GPa  
 $d$  = Diámetro del perno, mm  
 $d_2$  = Diámetro exterior del cono en la interfaz de contacto, mm  
 $D$  = diámetro promedio de la arandela, mm  
 $t$  = espesor de la mitad del cono, mm  
 $P_c$  = presión de contacto, MPa  
 $F_c$  = fuerza de compresión, N  
 $A_c$  = Área comprimida, mm<sup>2</sup>  
 $N$  = Número de pernos del ensamble  
 $T$  = Torque aplicado a cada perno, Nm  
 $f$  = Coeficiente de fricción, 0.2 para pernos de acero  
 $K$  = Coeficiente del par de torsión, 0.2  
 $p(r)$  = Presión de contacto, MPa

\*Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Azcapotzalco, Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Av. de las Granjas 682, Col. Santa Catarina, CP 02250, CDMX-México, [jesusalbcruf1022@gmail.com](mailto:jesusalbcruf1022@gmail.com), Estudiante de Posgrado de la Maestría en Ingeniería de Manufactura de la SEPI ESIME-UA.

\*\*Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Azcapotzalco, Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, [jsandoval@ipn.mx](mailto:jsandoval@ipn.mx), Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica, Profesor Investigador de la SEPI ESIME-UA.

\*\*\*Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Azcapotzalco, Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, [lafloresh@ipn.mx](mailto:lafloresh@ipn.mx), Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica, Profesor Investigador de la SEPI ESIME-UA.



$p_o$  = Presión de contacto máxima, MPa  
 $R_{max}$  = Radio exterior del cono en la interfaz de contacto, mm  
 $R_{min}$  = Radio del orificio del barreno, mm  
 $r$  = Distancia al centro de orificio, mm

## INTRODUCCIÓN

Las uniones apernadas se utilizan ampliamente en la construcción y en diferentes sistemas mecánicos tales como turbinas, bridas, motores, etc. Su propósito es mantener unidos a los elementos que componen los diferentes ensambles y transferir las cargas de un componente a otros (Li et al., 2022). Para ello se utiliza un sujetador roscado o perno que une a los demás elementos mediante una tuerca que al ajustarse estira el perno provocando una fuerza de sujeción llamada precarga o pretensión, la cual existe sin importar si se ejerce una carga externa sobre el perno (Budynas & Nisbett, 2012).

La precarga en una unión apernada tiene una influencia importante sobre el ensamble ya que reduce la carga externa soportada por el perno y también coloca a los miembros en compresión los cuales actúan como resortes de compresión en serie, aumentando así su capacidad para soportar fuerzas de tracción (Raeymaekers, 2022). Bajo la acción de las fuerzas de compresión que actúan sobre los miembros del ensamble, los esfuerzos se distribuyen en la forma de un cono conocido como cono de compresión. La forma del cono depende de diversos factores tales como las dimensiones de las partes ensambladas, materiales, juntas, especificaciones del perno, etc (Budynas & Nisbett, 2012). Sin embargo, la distribución de la presión entre la cabeza del perno y la tuerca no se distribuye uniformemente por lo que es complicado obtener la formación y distribución de los campos de esfuerzos debido a la compresión mediante cálculos analíticos (Bickford, 2008). En consecuencia, se recurre a métodos experimentales o al análisis por elementos finitos para obtener una aproximación del comportamiento del ensamble.

El método del elemento finito (MEF) para el análisis y modelado de uniones apernadas ha sido utilizado por diferentes autores para el estudio de diferentes temas involucrados en el ensamble de componentes. Por ejemplo, en la investigación de Bruzzone (2019), se planteó la formulación de una ecuación mediante los resultados obtenidos por el MEF de la representación de un perno como cuerpo sólido para el cálculo de la rigidez de los miembros de un ensamble la cual se comparó con los modelos clásicos para el cálculo de la rigidez de los elementos para su validación. En la investigación de Shi & Zhang (2022) se propone un modelo matemático mediante el uso del MEF de un perno precargado, el cual fue representado como cuerpo sólido, de los parámetros característicos de contacto para las interfaces de uniones apernadas, el cual toma en cuenta la presión de contacto distribuida no uniformemente; los resultados de la investigación indican que el modelo propuesto puede mejorar significativamente la precisión del modelado de uniones apernadas. Por otro lado, en el trabajo de Kim et al. (2007) se investigó el modelado de la estructura con uniones apernadas, utilizando cuatro clases de diferentes

representaciones de perno, donde se obtuvo que la representación del perno como cuerpo sólido muestra la mejor aproximación a los resultados experimentales. Finalmente, en el trabajo de Sušić et al. (2022) se estudió el efecto de la representación del perno sobre los esfuerzos y la deformación en un modelo sencillo, donde se concluyó que la representación del perno modelado como cuerpo sólido muestra la mejor aproximación a los resultados de la distribución de los esfuerzos en el cuerpo del perno.

En este trabajo se analiza la representación de un perno precargado, en dos eventos; como un cuerpo sólido y como un cuerpo de línea en la unión de dos placas mediante el programa ANSYS™ con el módulo Static Structural, el cual resuelve el Método del Elemento Finito (MEF), para realizar un análisis comparativo entre de los valores analíticos y los obtenidos por el MEF de los campos de esfuerzos y la deformación real en el ensamble y entre las caras de placas para ambas representaciones. Este estudio permitirá al lector una mayor comprensión del fenómeno estudiado y proporcionará una consideración de diseño y modelado para la simulación de componentes mecánicos que cuenten con uniones apernadas.

## METODOLOGÍA

### CONDICIONES DE FRONTERA

Para el modelo propuesto de dos placas unidas mediante un perno precargado, se considera como primera condición de frontera que la placa inferior se encuentra restringida en su movimiento en los vértices inferiores lo cual restringe el desplazamiento y rotación en los ejes X, Y y Z. La Figura 1 muestra una representación bidimensional del modelo donde se aplica esta condición.

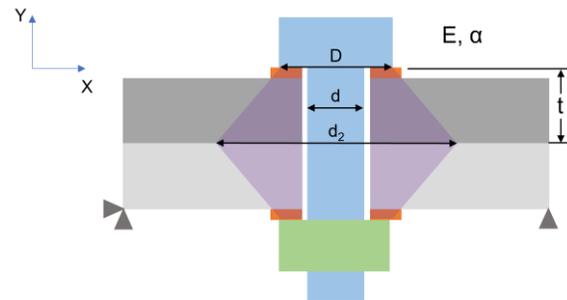


Figura 1.- Condiciones de frontera para el modelo inicial.  
(Autoría propia)

En la figura podemos observar que el ensamble está identificado por diferentes literales que representan el diámetro de cuerpo del perno (d), el diámetro exterior del cono en la interfaz de contacto ( $d_2$ ), el diámetro promedio de la arandela (D) el cual es aproximadamente 1.5 veces el diámetro del perno, el espesor de la mitad del cono (t), el módulo de Young (E) y el ángulo de la mitad del ápice del cono ( $\alpha$ ). En la Tabla. 1 se presentan las propiedades del acero A36, el cual fue utilizado como material en los elementos de sujeción y las placas.



**Tabla 1. Propiedades del acero A36 (Hibbeler, 2011).**

Propiedad	Valor
Densidad	7850 kg/m <sup>3</sup>
Módulo de Young	200 GPa
Relación de Poisson	0.3
Límite de Cedencia	250 MPa

### CÁLCULOS ANALÍTICOS DE LA RIGIDEZ Y PRESIÓN DE CONTACTO

Cuando un perno se somete a una precarga se induce una compresión en los elementos del ensamble que en conjunto se considera su analogía como el trabajo de resortes bajo compresión en serie. La relación de resorte o rigidez ( $k$ ), es la relación entre la precarga al elemento y el desplazamiento que se produce por esta fuerza (Budynas & Nisbett, 2012).

$$k = \frac{F_i}{\delta} \quad (1)$$

La rigidez de los elementos puede calcularse utilizando el método del cono de presión para un ángulo fijo del cono y asumiendo que la distribución de esfuerzos en los miembros del ensamble toma la forma un tronco cónico alrededor de la mitad de la unión como se muestra en la Figura 1 (Budynas & Nisbett, 2012; Raeymaekers, 2022). Así, la relación de resorte o rigidez del tronco es:

$$k = \frac{F_i}{\delta} = \frac{\pi E d \tan \alpha}{\ln \frac{(2t \tan \alpha + D - d)(D + d)}{(2t \tan \alpha + D + d)(D - d)}} \quad (2)$$

Por otra parte, la presión de contacto es una función de la fuerza de compresión y del área comprimida, como se expresa en la siguiente ecuación (Moreno Soriano et al., 2021):

$$P_c = \frac{F_c}{A_c} \quad (3)$$

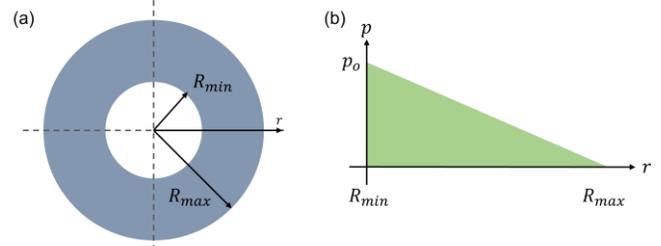
La fuerza de compresión aplicada  $F_c$  se describe mediante la ecuación.

$$F_c = \frac{TN}{fd} \quad (4)$$

El torque o par de torsión aplicado debido a una precarga puede estimarse mediante la siguiente expresión (Budynas & Nisbett, 2012):

$$T = KF_i d \quad (5)$$

Para la distribución de la presión de contacto entre las interfaces de uniones apernadas, se puede utilizar una función de aproximación ampliamente aceptada, la cual considera que la distribución de la presión de contacto disminuye linealmente en la dirección radial y permanece sin cambios en la dirección circunferencial como se observa en la Figura 2 (Li et al., 2022).



**Figura 2.- (a) Área de contacto nominal de la interfaz de la unión atornillada y (b) presión de contacto aproximada distribuida a lo largo del radio de contacto (Li et al., 2022).**

Por lo tanto, la presión de contacto  $p(r)$  que se distribuye a lo largo del radio de contacto puede ser expresada como:

$$p(r) = p_0 \left( \frac{R_{max} - r}{R_{max} - R_{min}} \right) \quad (6)$$

Para la obtención del radio de contacto o  $R_{max}$  se obtiene el diámetro exterior del tronco en la interfaz de contacto mediante la siguiente expresión (Juvinall & Marshek, 2012):

$$R_{max} = \frac{D + t \tan \alpha}{2} \quad (7)$$

La relación entre la precarga  $F_i$  y la presión de contacto satisface la función (Li et al., 2022).

$$F_i = \int_{R_{min}}^{R_{max}} 2\pi r p(r) dr \quad (8)$$

De la ecuación 6 y 8, se deduce la expresión para la presión de contacto máxima.

$$p_0 = \frac{3F_i}{\pi(R_{max}^2 + R_{max}R_{min} + R_{min}^2)} \quad (9)$$

### SOLUCIÓN ANALÍTICA

Para el caso de estudio de la unión apernada, se propone la aplicación de una precarga de 1000 N a un perno de 1/4 de pulgada de diámetro ( $6.35 \times 10^{-3}$  m) y un diámetro promedio de arandela de 9.525 mm ( $9.525 \times 10^{-3}$  m) como se observa en la Figura 3. Para el cálculo de la rigidez se considera que el ángulo de la mitad del ápice del cono es de  $30^\circ$ . Asimismo, debido a que la arandela y la placa superior son del mismo material el cono superior puede considerarse como un cono único con un espesor de 6.651 mm



( $6.651 \times 10^{-3}$  m). Para el cálculo de la presión de contacto, se considera que el área comprimida sea igual al área de la cara de la arandela en contacto con la cabeza del perno la cual cuenta con un área de  $45.32 \text{ mm}^2$  ( $45.32 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ )

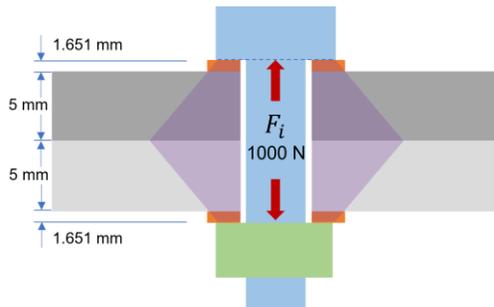


Figura 3.- Perno bajo precarga (Autoría propia)

Con los datos proporcionados la elongación de las placas junto con la arandela se calcula utilizando la ecuación (1) y (2), obteniendo un valor de  $3.15 \times 10^{-4}$  mm. Por otra parte, utilizando las ecuaciones (3), (4) y (5) se calcula la presión de contacto sobre la cara de arandela obteniendo un valor de 22 MPa.

Por otra parte, para el cálculo de la distribución de la presión en la interfaz de contacto se determina  $R_{max}$  con la ecuación (7) obteniendo un valor de 6.206 mm ( $6.206 \times 10^{-3}$  m), con el valor del radio del barrenado en la placa  $R_{min}$  de 3.373 mm ( $3.373 \times 10^{-3}$  m) y haciendo uso de la ecuación (9) se obtiene un valor de la presión de contacto máxima en la interfaz de 13.48 MPa. Con este último valor y haciendo uso de la ecuación (6) se realiza un gráfico de la distribución de la presión a lo largo del radio de contacto el cual se presenta en el análisis comparativo del esfuerzo y la deformación entre las placas.

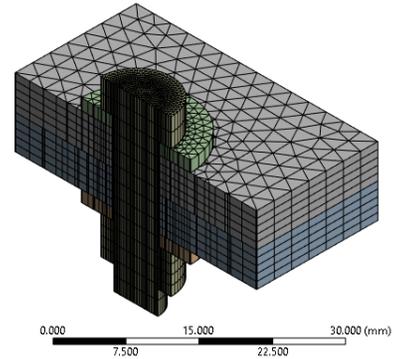
#### SIMULACIÓN NUMÉRICA COMPUTACIONAL

Para el análisis numérico de la precarga del perno como cuerpo sólido y como cuerpo de línea sobre las dos placas se realiza el modelado CAD de cada geometría, cabe mencionar que para el caso del perno como cuerpo sólido la geometría fue simplificada para facilitar el análisis numérico. Posteriormente ambos modelos fueron transformados en modelos numéricos compuestos por un número finito de nodos y elementos.

Para ambos casos el contacto entre las caras de las placas y entre las arandelas y las placas, se establece como friccional, con un coeficiente de fricción de 0.2. Asimismo, para el cuerpo sólido el contacto entre la cabeza del perno y la tuerca con las arandelas se define como friccional con un coeficiente de 0.2. Por otra parte, para el caso en el que el perno se representa como un cuerpo de línea, el contacto se establece mediante la generación de uniones con comportamiento deformable y una región de aplicación igual al área de contacto de la cabeza del perno. El modelo CAD y numérico de la geometría con el perno representado como cuerpo

sólido y como cuerpos de línea se muestran en la Figura 4 (a) y (b) respectivamente.

(a)



(b)

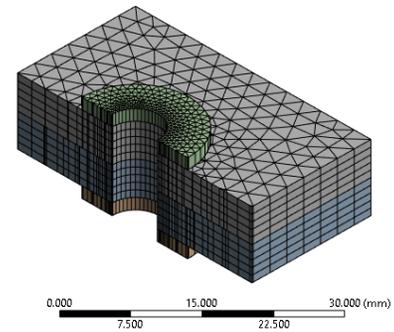


Figura 4.-Vista de corte de la representación numérica del perno como (a) cuerpo sólido y (b) cuerpo de línea (Autoría propia).

La simulación numérica se realizó mediante el programa ANSYS™ que resuelve el método del elemento finito (MEF). Para ello se utiliza el módulo Bolt Pretension para aplicar la precarga del perno, la cual se ejecuta en dos etapas simultáneas, en la primera se aplica la pretensión al cuerpo del perno y en la segunda se aplica un bloqueo en la longitud de agarre del perno para que permanezca constante cuando se termina la precarga del perno.

#### RESULTADOS Y ANÁLISIS

Los contornos de los campos de deformación real o desplazamiento de las placas junto con las arandelas, resultado de la pretensión del perno se muestran en la Figura 5, tanto para el cuerpo sólido y el cuerpo de línea.

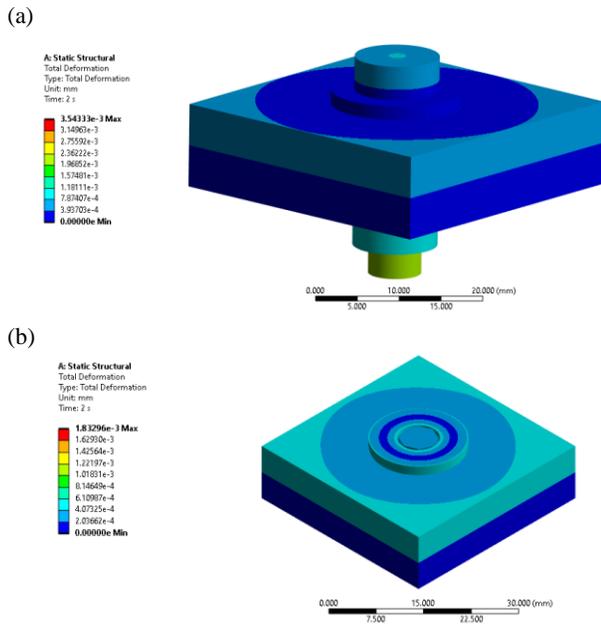


Figura 5.- Contornos de los campos de deformación para la representación del perno como (a) cuerpo sólido y (b) cuerpo de línea (Autoría propia).

La deformación comparable con los resultados analíticos se obtiene de una de las zonas en la superficie de contacto entre la cabeza del perno y la arandela, en comparación con otros trabajos (Sušić et al., 2022). donde la deformación total comparable con los cálculos analíticos se obtiene de la suma del valor máximo y mínimo que el análisis por el MEF proporciona. No obstante, los valores máximos y mínimos que el método proporciona corresponden a la deformación en el perno y en las placas, por lo que en este caso sería un error considerar la suma de estos valores como el valor de la deformación total en la placa que es comparable con el obtenido analíticamente. Por otra parte, la Figura 6 muestra la distribución de los campos de esfuerzos de compresión sobre las arandelas y las placas en forma de contornos.

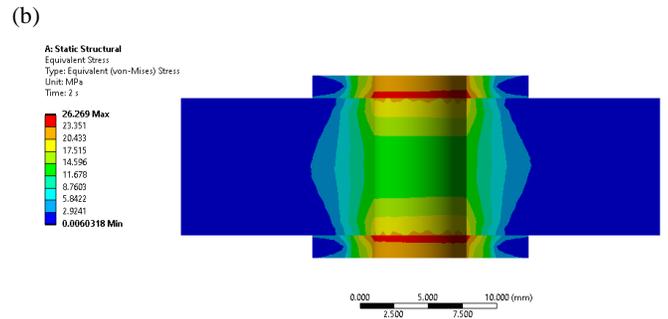
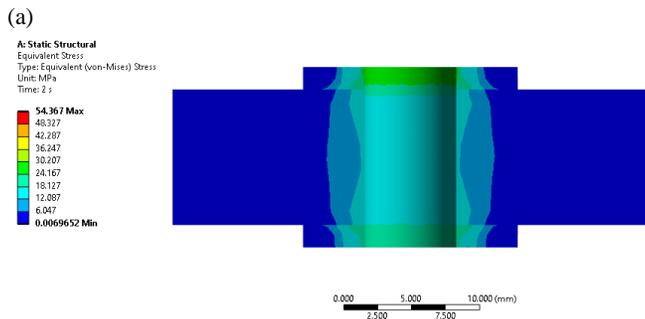
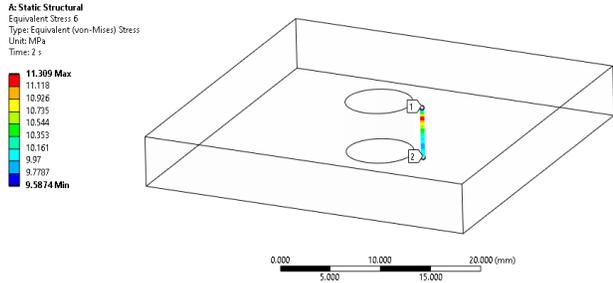


Figura 6.- Contornos de los campos de esfuerzos para la representación del perno como (a) cuerpo sólido y (b) cuerpo de línea (Autoría propia).

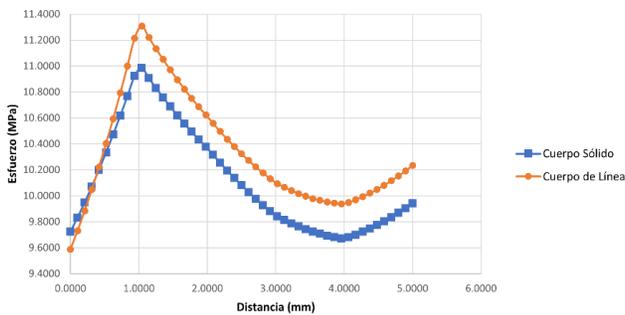
De los contornos de los campos de esfuerzos debido a la compresión de los elementos, se observa la formación de un patrón cónico no uniforme similar al mostrado en la literatura especializada en uniones apernadas (Bickford, 2008). Este patrón se ha obtenido mediante experimentación o mediante el MEF, debido a que la presión de contacto entre la cabeza del perno y la unión no es uniforme como tampoco lo es entre la tuerca y la unión, lo cual dificulta el cálculo de la distribución de la presión. En la representación del perno como cuerpo sólido se observa la formación de contornos no uniformes de la distribución de los campos de esfuerzo, los cuales son similares a los reportados en la literatura especializada. En contraste, los contornos que se presentan en el modelo con la representación del perno como cuerpo de línea tienden a formar un cono de compresión bien definido como el que se observa en la Figura 1.

Asimismo, se menciona que sobre las líneas que delimitan los contornos de los campos de esfuerzos de compresión, los valores de los esfuerzos son iguales cuando el perno es precargado. Para corroborar esto, se define un path o línea de trayectoria, la cual se aproxima al comportamiento de los contornos de los campos de esfuerzo a una distancia de 4.7625 mm, la cual es equivalente al radio del diámetro promedio de la arandela, y una profundidad de 5 mm del centro del orificio de las placas como se observa en la Figura 7, tanto para el perno como cuerpo sólido y como cuerpo de línea.



**Figura 7.-Línea de trayectoria sobre la placa superior para el modelo con representación del perno como cuerpo sólido (Autoría propia).**

De este análisis se obtienen las gráficas de los valores de la distancia vs. el esfuerzo las cuales se muestran en la Figura 8, sobre el path para ambos cuerpos, donde en la representación del perno como cuerpo sólido se obtuvo un valor máximo y mínimo de 10.98 y 9.67 MPa respectivamente, con una diferencia de 1.31 MPa, mientras que en el cuerpo de línea se obtuvo un valor máximo y mínimo de 11.31 y 9.59 MPa respectivamente, con una diferencia de 1.72 MPa. Por otro lado, al comparar el valor de esfuerzo máximo para ambas representaciones se obtiene una diferencia de 0.33 MPa, mientras que para el esfuerzo mínimo se obtiene una diferencia de 0.08 MPa. Por lo tanto, se puede decir que los resultados obtenidos de los contornos de los campos de esfuerzos para la representación del perno como cuerpo sólido y como cuerpo de línea muestran una excelente aproximación.



**Figura 8.-Valor del esfuerzo en función de la profundidad (Autoría propia).**

De acuerdo con el comportamiento de los gráficos para ambos cuerpos, se observa un comportamiento no lineal del esfuerzo conforme la distancia en el path incrementa, esto debido a que la trayectoria definida no sigue con exactitud la distribución de las líneas de los campos de esfuerzo mostradas por el MEF. No obstante, la diferencia entre los valores es mínima por lo que podría considerarse que los valores de los esfuerzos sobre los contornos son equivalentes.

### ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS RESULTADOS ANALÍTICOS Y NUMÉRICOS

Los resultados de los cálculos analíticos y por medio del método del elemento finito para el esfuerzo y la deformación sobre las placas para el modelo con la representación del perno como un cuerpo sólido se muestran en la Tabla 2.

**Tabla 2. Resultados obtenidos para la representación del perno como cuerpo sólido (Autoría propia).**

	Método Analítico	Método Numérico	Desviación de la solución analítica (%)
Deformación (mm)	$3.62 \times 10^{-4}$	$3.61 \times 10^{-4}$	0.27%
Esfuerzo (MPa)	22.06	21.88	0.81%

Por otra parte, los resultados de la comparación del esfuerzo y la deformación sobre las placas para el modelo con representación del perno como un cuerpo de línea se muestran en la Tabla 3.

**Tabla 3. Resultados obtenidos para la representación del perno como cuerpo de línea (Autoría propia).**

	Método Analítico	Método Numérico	Desviación de la solución analítica (%)
Desplazamiento (mm)	$3.62 \times 10^{-4}$	$3.57 \times 10^{-4}$	1.38%
Esfuerzo (MPa)	22.06	20.97	4.94%

De acuerdo con los valores registrados en la Tabla 1, se observa que los valores calculados analíticamente y los obtenidos mediante el método numérico para el modelo donde el perno se representó como un cuerpo sólido, muestran una excelente similitud debido a que la diferencia máxima para cada valor es de menos del 1%. En contraste, los valores calculados y los numéricos para la representación del perno como cuerpo de línea, los cuales se muestran en la tabla 2, muestran una mayor diferencia para cada uno de los valores. No obstante, la diferencia entre los valores no es mayor al 5%, por lo que estos también muestran una buena aproximación de los resultados con la ventaja de una disminución en el costo computacional al momento de resolver el MEF.

### ANÁLISIS COMPARATIVO DEL ESFUERZO Y LA DEFORMACIÓN ENTRE LAS CARAS DE LAS PLACAS

Para el estudio de los campos de esfuerzos provocados por la compresión de los elementos, se realiza un análisis de los contornos de las caras en contacto de la placa superior e inferior mediante la creación de una named selection para cada superficie.



De acuerdo con la Figura 6, los troncos o conos formados para cada modelo muestran una simetría a partir de la interfaz de contacto debido a que los elementos de la unión tienen el mismo módulo de Young ( $E$ ). Por lo tanto, los contornos de los campos de esfuerzos muestran valores idénticos o casi idénticos en ambas superficies. En la Figura 9 se exponen los contornos de los campos de esfuerzos para cada modelo con su respectiva representación de perno como cuerpo sólido y como cuerpo de línea, donde se puede observar que la distribución de los esfuerzos se extiende radialmente en la forma de un cono.

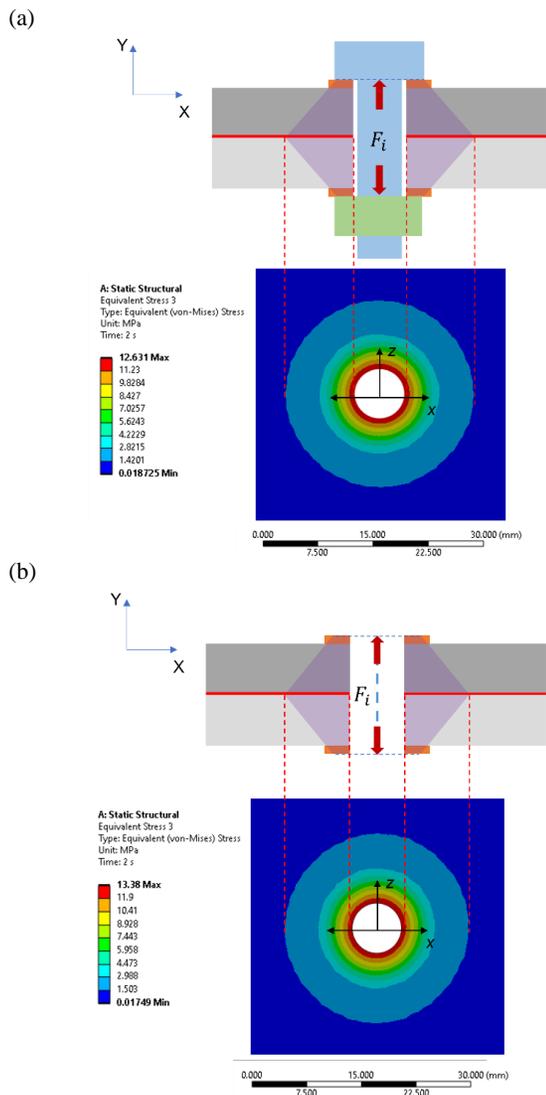


Figura 9.- Contornos de los campos de esfuerzos en las caras de las placas para la representación del perno como (a) cuerpo sólido y (b) cuerpo de línea (Autoría propia).

Con la finalidad de estudiar a mayor detalle la distribución de los campos de esfuerzo entre las caras de las placas y comparar los resultados arrojados con por el MEF y los cálculos analíticos, se define un path en la parte central de la placa inferior con el cual se obtiene un gráfico para cada modelo de la distribución de los campos de esfuerzos con respecto a la distancia el cual se muestran en la Figura 10.

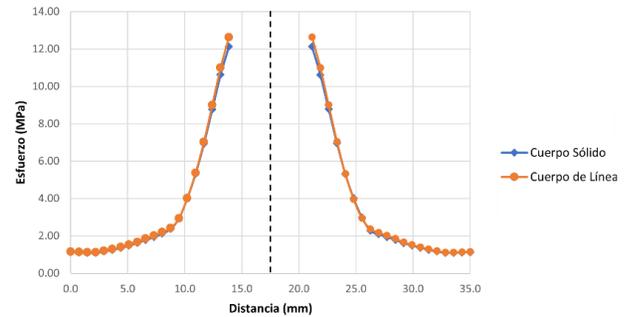
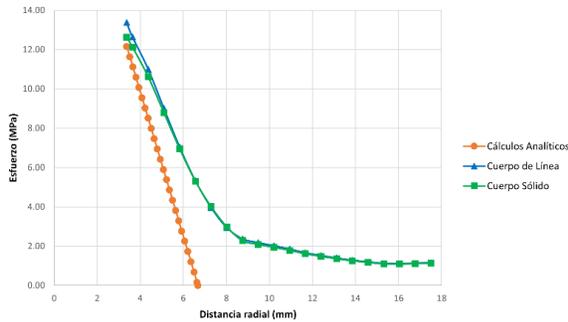


Figura 10.- Distribución de los esfuerzos sobre la línea de trayectoria para la representación del perno como cuerpo sólido y como cuerpo de línea (Autoría propia).

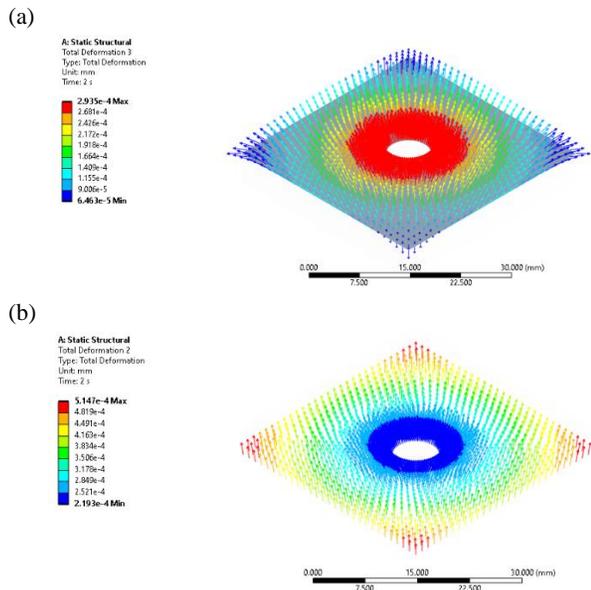
De acuerdo con el gráfico, se observa que la distribución de los esfuerzos sobre la cara de la placa inferior debido a la compresión de los elementos para ambos modelos es simétrica sobre la dirección circunferencial. Asimismo, se muestra que la presión no se distribuye de forma uniforme sobre la interfaz y que disminuye de forma gradual al llegar al radio de contacto máximo. Por último, se puede decir que los valores que el MEF muestra para ambos modelos son cercanos, por lo tanto, existe una excelente aproximación entre ambas representaciones.

Por otra parte, para el análisis de la distribución de los esfuerzos sobre la línea de trayectoria de los resultados obtenidos por el MEF y el modelo analítico, se realiza un gráfico del cambio de la distribución de esfuerzos con respecto a la distancia radial el cual se muestra en la Figura 11. De este gráfico se observa que la función de aproximación para los cálculos analíticos muestra una clara discrepancia con los numéricos debido a que este modelo considera que la distribución de los esfuerzos debido a la presión de contacto disminuye linealmente de acuerdo con el cono de compresión, sin embargo, debido a la complejidad de la distribución de la presión de contacto en uniones apernadas, es bastante difícil establecer un modelo analítico preciso que describa el comportamiento no lineal de la distribución.

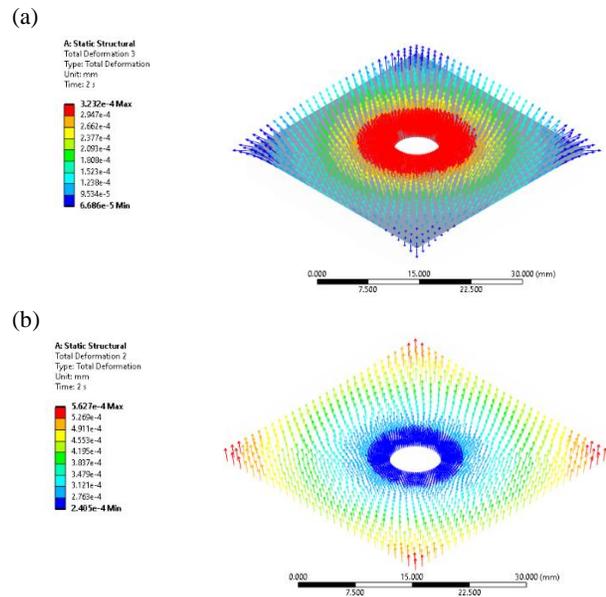


**Figura 11.- Distribución de los esfuerzos con respecto a la distancia radial del modelo analítico y de los modelos numéricos (Autoría propia).**

Para el estudio de deformación real provocada por la compresión de los elementos del ensamble entre las caras de las placas, se realiza una named selection en cada una de las caras en contacto para obtener los contornos de deformación en forma vectorial para ambas representaciones de perno, los cuales se observan en las Figuras 12 y 13, donde se muestra que para ambos modelos los contornos de deformación muestran un comportamiento idéntico tanto en la cara superior e inferior del ensamble,

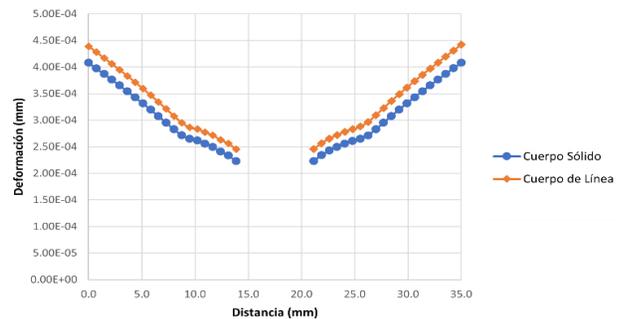


**Figura 12.- Contornos de deformación de forma vectorial para la (a) cara inferior y (b) cara superior, del modelo con representación del perno como cuerpo sólido (Autoría propia).**



**Figura 13.- Contornos de deformación de forma vectorial para la (a) cara inferior y (b) cara superior, del modelo con representación del perno como cuerpo de línea (Autoría propia).**

Para observar a mayor detalle la distribución de los campos de esfuerzo entre las caras de las placas y comparar los resultados para los dos modelos propuestos, se define un “path” en la parte central de la placa inferior y superior de cada modelo, con el cual se grafica el desplazamiento con respecto a la distancia para cada modelo. Los gráficos se muestran en la Figura 14 y 15.

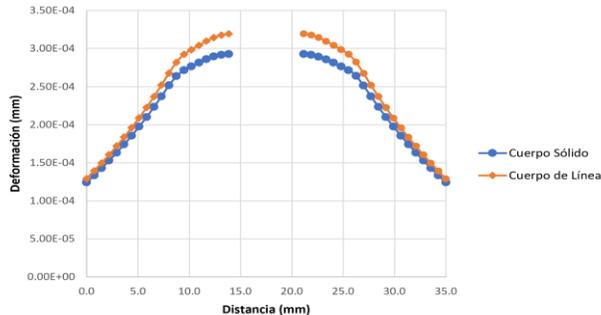


**Figura 14.- Distribución de la deformación en la placa superior para la representación del perno como cuerpo sólido y como cuerpo de línea (Autoría propia).**

De acuerdo con el gráfico de la Figura 14 se observa que, debido a la compresión causada por la aplicación de la precarga del perno, la placa superior sufre de una deformación real o desplazamiento mayor en los extremos libres debido a la flexión de la placa en



comparación con la zona cercana al barreno, la cual sufre de un desplazamiento menor.



**Figura 15.- Distribución de la deformación en la placa inferior para la representación del perno como cuerpo sólido y como cuerpo de línea (Autoría propia).**

En contraste, en la placa inferior de la Figura 15 se aprecia que el desplazamiento es mucho mayor en la zona central debido a que es la zona de contacto de la placa superior mientras que en los extremos o bordes de la placa la deformación es menor debido a la condición de frontera donde se restringe el movimiento y rotación de los vértices, de la cual no existir se esperaría un comportamiento similar al presentado en la placa superior. De ambos gráficos se observa que existen pequeños desplazamientos en la zona de contacto de las placas, los cuales incrementan en los extremos y decrecen en la zona cercana al perno precargado, lo cual representa un factor de diseño importante al realizar uniones apernadas de recipientes que contiene líquidos, ya que estas pequeñas deformaciones pueden provocar fugaz.

Por último, de la comparación de los resultados presentados en las gráficas, del modelo con la representación del perno como cuerpo sólido y como cuerpo de línea, se muestra que en la placa superior existe un desplazamiento de los valores obtenidos para ambos modelos, no obstante, la diferencia entre los valores máximos y mínimos es mínima, además de seguir un comportamiento idéntico. De igual forma que en la cara superior, se observa un comportamiento similar en la cara inferior. Por lo tanto, se puede decir que los resultados proporcionados por el MEF para ambos modelos muestran una excelente aproximación entre ellos para el análisis de la deformación real entre la interfaz de las caras en contacto.

## CONCLUSIÓN

En este trabajo se llevó a cabo un análisis comparativo de las soluciones analíticas y numéricas mediante el MEF de dos modelos de ensambles con la representación del perno precargado como cuerpo sólido y como cuerpo de línea. Asimismo, se presenta un conjunto de observaciones obtenidas a partir del análisis del comportamiento de los campos de esfuerzos y deformaciones en las caras de contacto del ensamble. Los resultados analíticos del ensamble comparables con los numéricos en ambos modelos muestran una excelente similitud, siendo el modelo con la

representación del perno como cuerpo sólido el que proporciona una mejor aproximación a los resultados analíticos y a la distribución de los contornos de los campos de esfuerzos reportados en la literatura, pero con un mayor costo computacional debido a la discretización tanto del perno como del ensamble. En contraste, los resultados presentados por el modelo con la representación del perno como cuerpo de línea muestran una aproximación menor a los resultados analíticos y al cuerpo sólido. No obstante, la diferencia entre los resultados es mínima con la ventaja de la reducción en el costo computacional para la resolución del MEF. Por otra parte, del análisis de los campos de esfuerzos y la deformación entre las caras de la placa para ambos modelos, se muestra un comportamiento similar tanto de la distribución de los esfuerzos como de la deformación de los elementos que componen el ensamble. Por lo tanto, se puede decir que la representación del perno como un cuerpo sólido o como un cuerpo de línea no tiene un efecto significativo sobre el análisis de uniones apernadas donde el perno es sometido a precarga. Esta comparación resulta útil para el diseño y simulación de estructuras, elementos de máquinas y prototipos que son ensamblados mediante pernos precargados.

## AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece el apoyo al Consejo Nacional de Humanidades Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por la beca otorgada para cursar la Maestría en Ingeniería de Manufactura en la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Azcapotzalco. Así mismo, los autores agradecen el apoyo otorgado por el proyecto SIP-IPN no. 20230955 y al Instituto Politécnico Nacional por el apoyo recibido para el desarrollo de esta investigación académica.

## REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

1. Bickford, J. H. (2008). *Introduction to the Design and Behavior of Bolted Joints* (Cuarta). Taylor and Francis Group.
2. Bruzzone, F., Delprete, C., & Rosso, C. (2019). A proposal of a unique formula for computing compliance in bolted joints. *Procedia Structural Integrity*, 24, 167–177. <https://doi.org/10.1016/J.PROSTR.2020.02.089>
3. Budynas, R. G., & Nisbett, K. (2012). *Diseño en ingeniería mecánica de Shigley* (Novena). McGraw-Hill Educación.
4. Hibbeler, Russell. (2011). *Mecánica de Materiales* (Octava). Pearson Educación.
5. Juvinall, R. C., & Marshek, K. M. (2012). *Fundamentals of Machine Component Design* (Quinta). Wiley & Sons, Inc.
6. Kim, J., Yoon, J.-C., & Kang, B.-S. (2007). Finite element analysis and modeling of structure with bolted joints. *Applied Mathematical Modelling*, 31(5), 895–911. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2006.03.020>
7. Li, D., Botto, D., Li, R., Xu, C., & Zhang, W. (2022). Experimental and theoretical studies on friction contact of bolted joint interfaces. *International Journal of Mechanical*



- Sciences*, 236, 107773.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107773>
8. Moreno Soriano, R., Rojas, N., Nieto, E., de Guadalupe González-Huerta, R., & Sandoval-Pineda, J. M. (2021). Influence of the gasket materials on the clamping pressure distribution in a PEM water electrolyzer: Bolt torques and operation mode in pre-conditioning. *International Journal of Hydrogen Energy*, 46(51), 25944–25953.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2021.03.076>
9. Raeymaekers, B. (2022). *Design of Mechanical Elements: A Concise Introduction to Mechanical Design Considerations and Calculations*. John Wiley & Sons, Inc.
10. Shi, W., & Zhang, Z. (2022). Contact characteristic parameters modeling for the assembled structure with bolted joints. *Tribology International*, 165, 107272.  
<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2021.107272>
11. Sušić, A., Nežirić, E., Isić, S., & Šunje, E. (2022). *Stress and Deformation Analysis of Different Bolt Models in Finite Element Analysis* (pp. 155–162). [https://doi.org/10.1007/978-3-031-05230-9\\_18](https://doi.org/10.1007/978-3-031-05230-9_18)

### INFORMACIÓN ACADÉMICA

**Jesus Alberto Cruz Flores.** Ingeniero en Metalurgia y Materiales egresado de la Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas del Instituto Politécnico Nacional. Estudiante de la Maestría en Ingeniería de Manufactura en la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación (SEPI) de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME) Unidad Azcapotzalco del Instituto Politécnico Nacional.

**Juan Manuel Sandoval Pineda.** Ingeniero Mecánico egresado de la ESIME Unidad Zacatenco del Instituto Politécnico Nacional. Maestro en Ciencias con especialidad en Ingeniería Mecánica en la SEPI de la ESIME Unidad Zacatenco. Doctor en Ciencias con especialidad en Ingeniería Mecánica en la SEPI de la ESIME Unidad Zacatenco. Actualmente miembro del Sistema Nacional de Investigadores Nivel I y Profesor Investigador de la SEPI de la ESIME Unidad Azcapotzalco.

**Luis Armando Flores Herrera:** Ingeniero en Robótica Industrial egresado de la ESIME Unidad Azcapotzalco del Instituto Politécnico Nacional. Maestro en Ciencias con especialidad en Diseño Mecánico en la SEPI de la ESIME Unidad Zacatenco. Doctor en Ingeniería Mecánica en la SEPI de la ESIME Unidad Zacatenco. Actualmente miembro del Sistema Nacional de Investigadores Nivel I y Profesor Investigador de la SEPI en la ESIME Unidad Azcapotzalco.

