



Evaluación de resultados entre el método numérico y el trabajo analítico en vigas isostáticas a flexión

Carlos Elias Miguel Ruiz*, **Guillermo Urriolagoitia Sosa****, **Jacobo Martínez Reyes*****, **Beatriz Romero Ángeles******, **Rolando Manuel Jose*******, **Rodrigo García García*******, **David Esaú Carbajal López*******.

RESUMEN

Las vigas son elementos estructurales indispensables en la Ingeniería. Estos elementos, junto con las columnas, soportan todas las cargas externas de la estructura, y a su vez, deben de ser capaces de sostener su propio peso. Las cargas que soportan las vigas son transversales, es decir, perpendiculares a su eje largo, generando flexión. Por tal motivo, al analizarlas deben de ser capaces de soportar esfuerzos tanto de tensión como de compresión, Beer (2015). En este artículo, se exponen los resultados numéricos y analíticos obtenidos en la solución de vigas isostáticas sometidas a flexión, para obtener el campo de desplazamientos y deformaciones unitarias que presentan, facilitando a los lectores la manera de determinar los puntos característicos de una viga y simplificar el trabajo. Para obtener los resultados se hará uso de métodos numéricos computacionales para su solución y se realizará la comparación de resultados con trabajo analítico. Las variables que se van a comparar son las deformaciones unitarias de la viga, esfuerzos provocados por flexión, diagramas de fuerzas cortantes, reacciones en los apoyos y la flecha máxima.

ABSTRACT

Beams are essential structural elements in Engineering. These elements, along with columns, support all the external loads of the structure and, at the same time, must be able to sustain their weight. The loads supported by beams are transverse, meaning they are perpendicular to their long axis, resulting in bending. For this reason, when analyzing beams, they must be able to withstand both tension and compression stress.

In this article, the numerical and analytical results obtained in the solution of isostatic beams subjected to bending are presented. These results provide information about the displacement field and

strain that beams exhibit. This information helps readers identify the characteristic points of a beam and simplifies the analysis process. Computational numerical methods are used to obtain these results, and a comparison with analytical work is performed. The variables that will be compared include strains of the beam, stresses, shear diagrams, support reactions, and maximum deflection.

Palabras claves: Viga, Elemento finito, Diseño, Esfuerzos.

INTRODUCCION.

Los elementos delgados que soportan cargas aplicadas en forma perpendicular a su eje longitudinal se denominan vigas. Estos elementos son clasificados según la forma en la que están apoyadas, por ejemplo, viga simplemente apoyada o viga en voladizo, Hibbeler (2011).

Asimismo, el análisis de las vigas se divide en dos: vigas isostáticas y vigas hiperestáticas, esto según las condiciones de los apoyos que presente el elemento a analizar, es decir, si la viga cuenta con un número igual o inferior a tres incógnitas en las reacciones de los apoyos, con tan solo utilizar las condiciones de equilibrio estático será necesario, por el contrario, si tiene más de tres incógnitas se tendrá que hacer uso de nuevas expresiones, Heyman (2002).

Por otro lado, gracias a la evolución de la tecnología, ha permitido desarrollar programas computacionales que nos permiten realizar análisis de varios dispositivos o elementos estructurales (para este trabajo vigas). Estos programas nos permiten obtener una aproximación de resultados y predecir el comportamiento del elemento.

En este trabajo se pretende contrastar los resultados obtenidos de un trabajo analítico y un análisis numérico realizado en el programa computacional de Ansys APDL versión estudiantil.

ANTECEDENTES.

El análisis estructural, conseguido de forma empírica, ha tenido gran influencia para el desarrollo de diversas técnicas de construcción, aun cuando su compresión en la época de las civilizaciones antiguas no era el mejor, ya que el progreso en

Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Sección de Estudios de Posgrados e Investigación unidad Zacatenco.

cmiguelr1800@alumno.ipn.mx*

guiurri@hotmail.com**

jmartinezr0617@ipn.mx***

bromeroa@ipn.mx****

rmanuelj1800@alumno.ipn.mx*****

rgarciag1801@alumno.ipn.mx***** esaucarba99@gmail.com*****





teorías y formulas se han llevado a cabo en el último par de siglos, pero sin la evolución e interpretación que comenzó a generarse desde hace miles de años atrás, no se tendrían los conocimientos que se tienen en la actualidad. Todos los saberes empíricos que fueron desarrollando diversas civilizaciones permitieron la construcción de enormes miembros estructurales, como lo fueron las pirámides, templos ceremoniales, puentes, entre otros, Nelson (2006).

El inicio del método científico se le puede retribuir a Aristóteles (384-322 A.C.), quien estudio las relaciones de causa-efecto empleando el razonamiento deductivo. De esta manera, determino algunas de las características que implicaría la física, como magnitud, movimiento y tiempo. Introduciendo el análisis de los hechos como inicio del método experimental, Álvarez (2016). Posteriormente a Leonardo da Vinci (1452-1519), quien tuvo grandes aportaciones en distintas ramas de la ciencia, una de ellas la arquitectura, donde se han encontrado diversas notas donde habla acerca de grietas, estabilidad de estructuras, resistencia de arcos, vigas a flexión, además de mencionar conceptos de pandeo y compresión, Torres (2011). El análisis estructural, tal como es conocida en la actualidad, tiene sus inicios alrededor del siglo XVII, gracias a las contribuciones de Galileo Galilei (1564-1642), quien en su libro Dos Nuevas Ciencias, aborda temas sobre propiedades mecánicas de materiales, donde afirma que la resistencia de una barra a tensión no depende la longitud, sino a la sección transversal del material, Monteza (1983).

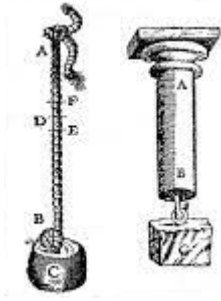


Figura 1.- Barra a tensión (Aportes de Galileo Galilei)

No fue hasta que Young (1773-1829) determinó la elasticidad de los materiales mediante el módulo de elasticidad, mejor conocido como módulo de Young, empleado en materiales con comportamiento lineal-elásticos. De la misma manera, Simeón Poisson (1781-1840), determinó con otra constante que contribuyó con la teoría de elasticidad, Álvarez (2016).

Richard Courant (1888-1972), fue el primero en desarrollar el Método de Elementos Finitos (MEF), que tras los avances que se han dado, tanto matemáticos como tecnológicos, se fueron desarrollando programas computacionales que permitieron la solución de problemas complejos del área de mecánica, Álvarez (2016).

Todas estas mejoras en las técnicas y el total entendimiento se vieron fortalecidas gracias al cálculo estructural, auxiliado en los métodos derivados de la mecánica y análisis matemático. Estos avances fueron posibles con el descubrimiento de que todos los fenómenos naturales se pueden analizar mediante las relaciones exactas de las matemáticas, siempre y cuando se establezcan modelos adecuados para su estudio. De esta manera se dio origen a la ciencia moderna y para el desarrollo del cálculo de estructuras, donde el cálculo diferencial e integral se hicieron indispensables para el análisis.

MARCO TEÓRICO.

De acuerdo con “Mecánica de Materiales” de Russell Hibbeler podemos citar:

ECUACIONES DE EQUILIBRIO. El equilibrio de un cuerpo requiere un balance de fuerzas para impedir que el cuerpo se traslade o tenga un movimiento acelerado. Estas condiciones pueden expresarse de manera matemática mediante:

$$\sum F = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_O = 0 \quad (2)$$

Donde $\sum F$ representa todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y $\sum M_O$ es la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto a cualquier punto O, Hibbeler (2011).

ANÁLISIS DE FLEXIÓN EN VIGAS. Una de las características de las vigas es que son elementos largos, donde su longitud debe ser al menos diez veces el valor de su sección transversal. Otra característica que tiene estos elementos es que las cargas son transversales, es decir, que la carga genera flexión, Beer (2015).

Las vigas se clasifican según el tipo de apoyo, y dependiendo del cuales sean los apoyos que tenga la viga, serán las reacciones que presenta cada uno de los casos.

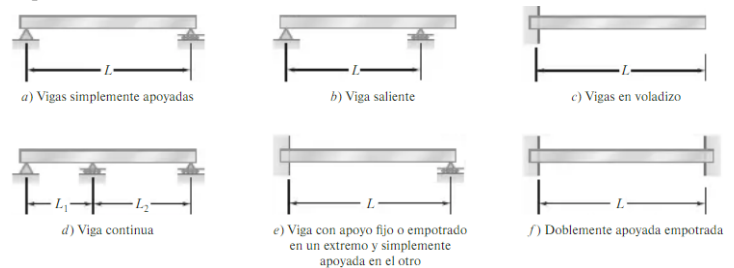


Figura 2.- Clasificación de vigas por su apoyo, Beer (2015).

Las cargas aplicadas en las vigas se pueden presentar como puntuales, las cuales actúan en un punto en específico, asimismo, existen las cargas distribuidas, las cuales pueden ser rectangulares, trapezoidales o triangulares.

FUERZAS CORTANTES Y MOMENTOS FLEXIONANTES.

De acuerdo con “Resistencia de Materiales” de Robert L. Mott, podemos citar:

Fuerzas cortantes: Las fuerzas cortantes son fuerzas internas generadas en el material de una viga para equilibrar las fuerzas



externas aplicadas y garantizar el equilibrio de todas sus partes, Mott (2009).

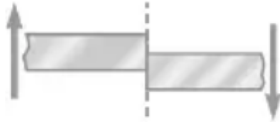


Figura 3.- Fuerza cortante, Beer (2015).

Momento flexionante: Los momentos flexionantes son momentos internos que se generan en el material de una viga para equilibrar la tendencia de las fuerzas externas de hacer que gire cualquier parte de ella, Mott (2009).



Figura 4.- Momento flexionante, Beer (2015).

Cuando se realiza el diseño de vigas, es esencial determinar la deformación lineal o deflexión, incluso si la carga aplicada es mínima, existe una pequeña deflexión sobre la viga. La flecha, como comúnmente se le conoce a las deflexiones, puede originar daños indeseables en estructuras y elementos, resultando en accidentes o daños irreparables, por lo que al realizar el cálculo de las flechas, la tolerancia permita estabilidad en distintas normas según su aplicación, es muy poca. Existen varios métodos para determinar las deformaciones de vigas, pero el más utilizado por su precisión es el Método de la doble Integración. Este método relaciona directamente la curvatura con el momento debido a las cargas a las que es sometida la viga.

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = Mx \quad (3)$$

Integrando la ecuación anterior, se obtiene la ecuación que nos proporcionará la pendiente.

$$EI \frac{dy}{dx} = EI\theta = \int M(x) dx + C_1 \quad (4)$$

Al realizar una segunda integral a la primera fórmula, se obtiene la flecha en cualquier punto de la viga debido a las cargas a las que está sometida.

$$EIy = \iint M(x) dx + C_1 x + C_2 \quad (5)$$

DESARROLLO.

La viga planteada será la siguiente:

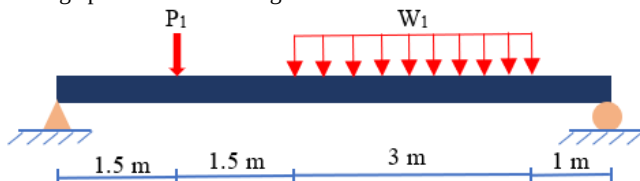


Figura 5.- Problema de viga, diseño propio elaborado en Word.

Donde la carga $P_1=20\text{KN}$ y $W_1=30\text{KN/m}$. Al tratarse de un acero sabemos que el módulo de Young es de 200GPa y tiene un coeficiente de Poisson de 0.28 . El problema nos indica que el momento de inercia de la sección transversal es $I=1 \times 10^8 \text{ mm}^4 = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^4$.

Con estos datos podemos iniciar dibujando el Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.), el cual nos servirá para determinar las reacciones en los apoyos.

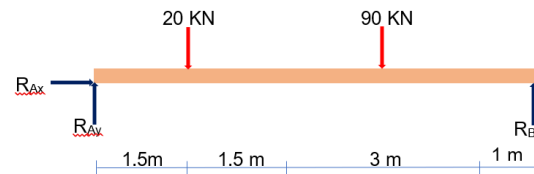


Figura 6.- Diagrama de cuerpo libre de la viga, diseño propio elaborado en Word.

Al tratarse de un problema de estática, se sabe que la sumatoria de fuerzas que actúan sobre la viga es nula y que la sumatoria de momentos respecto a cualquier punto también lo es.

$$\sum F_x = 0 \quad (6)$$

$$\sum F_y = 0 = R_{Ay} - 20 \text{ KN} - 90 \text{ KN} + R_{By} = 0 \quad (7)$$

NOTA: Los momentos en sentido antihorario son positivos y los giros en sentido horario son negativos.

$$\sum M_A = 0 \quad (8)$$

$$-20 \text{ KN}(1.5\text{m}) - 90 \text{ KN}(4.5\text{m}) + R_{By}(7\text{m}) = 0 \quad (9)$$

De la ecuación (9) se despeja R_{By} , y posteriormente el valor obtenido se sustituye en la ecuación (7).

$$R_{By} = \frac{30 \text{ KNm} + 405 \text{ KNm}}{7 \text{ m}} = 62.143 \text{ KN} \quad (10)$$

$$\therefore R_{Ay} = 47.857 \text{ KN} \quad (11)$$

Una vez obtenido las reacciones en los apoyos, se calcula los diagramas de fuerzas cortante y momento flexionante, para la cual se hará uso de las siguientes fórmulas:

$$V_A = R_A - 20 \text{ KN} - 30 \text{ KN}(x - 3) + 30 \text{ KN}(x - 6) \quad (12)$$

$$M_A = R_A(x) - 20 \text{ KN}(x - 1.5) - \frac{30 \text{ KN}(x - 3)^2}{2} + \frac{30 \text{ KN}(x - 6)^2}{2} \quad (13)$$

En estas fórmulas se sustituirán los valores de $x=0, 1.5, 3, 6, 7$ y 3.93 (momento máximo). Los valores obtenidos son los siguientes:

Tabla 1.- Valores de fuerzas cortantes y momentos flexionantes:

x (m)	Cortante (KN)	Momento (KNm)
0	47.857	0



1.5	47.857	71.785
1.5	27.857	71.785
3	27.857	113.571
3.93	0	126.5
6	-62.143	62.142
7	-62.143	0

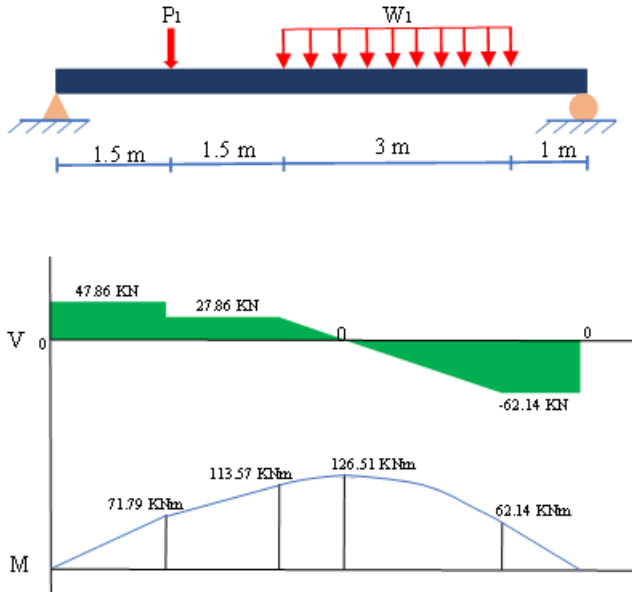


Figura 7.- Diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes, diseño propio elaborado en Word.

Posteriormente se procederá a calcular la flecha, por lo que se hará uso del método de la doble integración.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Mx \quad (14)$$

Sustituyendo nos queda que:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -47.857 \text{ kN}(x) + 20 \text{ kN}(x-1.5) + \frac{30 \text{ kN}(x-3)^2}{2} - \frac{30 \text{ kN}(x-6)^2}{2} \quad (15)$$

Si integramos la expresión anterior tenemos que:

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{-47.857 \text{ kN}(x)^2}{2} + \frac{20 \text{ kN}(x-1.5)^2}{2} + \frac{30 \text{ kN}(x-3)^3}{6} - \frac{30 \text{ kN}(x-6)^3}{6} + C_1 \quad (16)$$

Al realizar la segunda integración de la ecuación (14) nos queda que:

$$EI y = \frac{-47.857 \text{ kN}(x)^3}{6} + \frac{20 \text{ kN}(x-1.5)^3}{6} + \frac{30 \text{ kN}(x-3)^4}{24} - \frac{30 \text{ kN}(x-6)^4}{24} + C_1 x + C_2 \quad (17)$$

Se conoce que la deflexión en los apoyos es cero, por lo que si se sustituyen las condiciones de frontera se determinarán las constantes de integración, por lo que si $x=0$; $y=0$. Sustituyendo en la ecuación (17)

$$0 = EI y = 0 + C_1(0) + C_2 \quad \therefore C_2 = 0 \quad (18)$$

Si $x=7$; $y=0$. Sustituir en ecuación (12)

$$0 = EI y = \frac{-47.857 \text{ kN}(7)^3}{6} + \frac{20 \text{ kN}(5.5)^3}{6} + \frac{30 \text{ kN}(4)^4}{24} - \frac{30 \text{ kN}(1)^4}{24} + C_1(7) \quad (19)$$

Para calcular la flecha se sustituye en ecuación (12) cuando $x=3.5$

$$(200 \text{ GPa})(1 \times 10^{-4} \text{ m}^4)y = \frac{-47.857 \text{ kN}(3.5)^3}{6} + \frac{20 \text{ kN}(2)^3}{6} + \frac{30 \text{ kN}(0.5)^4}{24} + (266.07 \text{ kNm}^2)(3.5) \quad (20)$$

$$y_{\max} = 0.0308 \text{ m} = 30.8 \text{ mm}$$

Para calcular el esfuerzo máximo provocado por flexión, se tiene:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \quad (21)$$

Debido a que el problema no nos proporciona la forma geométrica de la sección transversal, suponemos que será perfil cuadrado, y de acuerdo con la fórmula de momento de inercia de calcularán las medidas:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad \text{si } b = h \quad (22)$$

$$h = \sqrt[4]{12I} \quad (23)$$

Sustituyendo valores en (23) tenemos que:

$$h = \sqrt[4]{(1 \times 10^{-4} \text{ m}^4)(12)} = 0.1861 \text{ m}$$

Al ser un perfil cuadrado se puede determinar que el valor de $c=h/2=0.09305 \text{ m}$, $M=126.5 \text{ kNm}$ y $I=1 \times 10^{-4} \text{ m}^4$

Sustituyendo valores en la ecuación (21):

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{(126.50 \text{ kNm})(0.09305 \text{ m})}{1 \times 10^{-4} \text{ m}^4} = 117,708 \text{ kN/m}^2$$

Una vez que se determinaron los principales puntos característicos de la viga, se procederá a realizar el análisis en el programa computacional Ansys APDL versión estudiantil.

Para iniciar se tendrá que configurar todos los parámetros del programa:

- 1) Establecer que es un análisis estructural.
- 2) Seleccionar un elemento tipo viga (beam 2nodos 188).
- 3) Colocar las propiedades del material; Módulo de Young=200GPa; Coeficiente de Poisson=0.28
- 4) Realizar el diseño de la viga y establecer la sección transversal.
- 5) Colocar las condiciones de frontera en los apoyos, y de la misma manera, colocar las cargas aplicadas.
- 6) Resolver el análisis.

Una vez resuelto, se leerán los resultados en el Postprocesador, obteniendo que las reacciones en los apoyos son:



```
PRINT REACTION SOLUTIONS PER NODE
**** POST1 TOTAL REACTION SOLUTION LISTING ****
LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0
THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM
NODE FX FY FZ MX MY MZ
1 0.0000 47857. 0.0000 -0.42727E-012 0.0000 0.0000
152 0.0000 62143. 0.0000 -0.42727E-012 0.0000 0.0000
TOTAL VALUES
VALUE 0.0000 0.11000E+006 0.0000 -0.42727E-012 0.0000 0.0000
```

Figura 8.- Reacciones en apoyos en Newton (N), resultados obtenidos en Ansys APDL versión estudiantil.

Como se puede observar en la imagen, la deflexión máxima (flecha máxima) nos da un valor de 0.030904 m

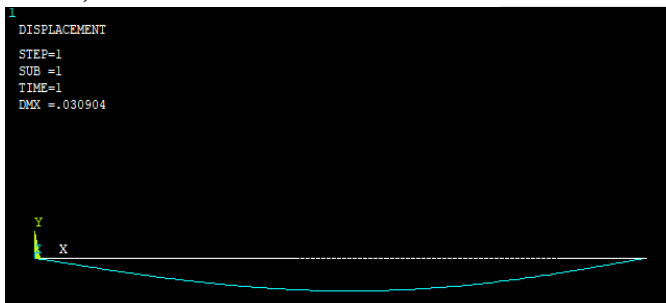


Figura 9.- Deflexión máxima, Análisis realizado en Ansys APDL versión estudiantil.

También podemos visualizar los diagramas de Fuerzas Cortantes y Momentos flexionantes.

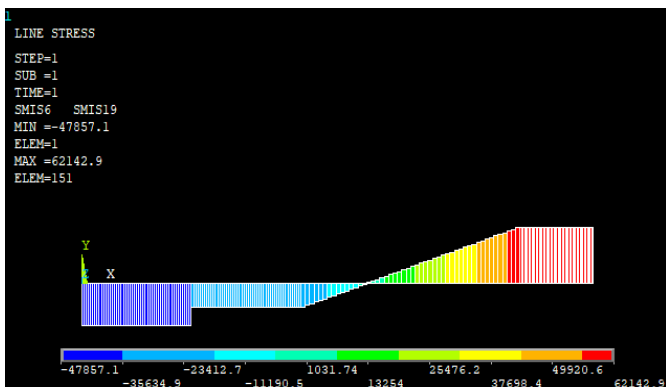


Figura 10.- Diagrama de fuerzas cortantes (N), Análisis realizado en Ansys APDL versión estudiantil.

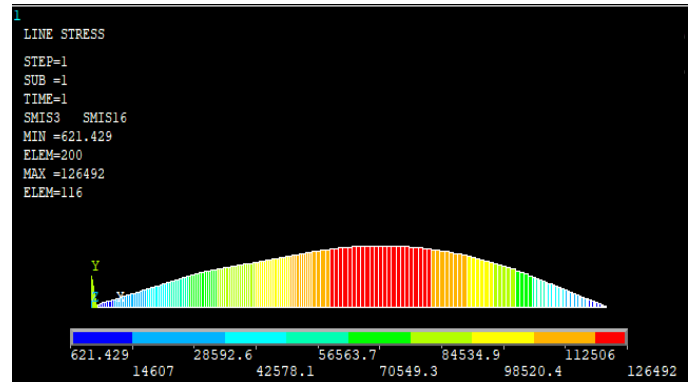


Figura 11.- Diagrama de momentos flexionantes (Nm), Análisis realizado en Ansys APDL versión estudiantil.

El esfuerzo provocado por flexión que nos proporciona el programa es de $0.11762 \times 10^9 \text{ N/m}^2 = 117,620 \text{ KPa}$

```
PRINT $ ELEMENT SOLUTION PER ELEMENT
STRESSES AT BEAM SECTION NODAL POINTS
ELEMENT NODE = 37
SEC NODE SXX SYY SZZ
1 0.11762E+009 0.0000 0.0000
3 0.74506E-008 0.0000 0.0000
13 0.13039E-007 0.0000 0.0000
11 0.11762E+009 0.0000 0.0000
5 -0.11762E+009 0.0000 0.0000
15 -0.11762E+009 0.0000 0.0000
23 0.11176E-007 0.0000 0.0000
21 0.11762E+009 0.0000 0.0000
25 -0.11762E+009 0.0000 0.0000
Max= 0.11762E+009 0.0000 0.0000
Min= -0.11762E+009 0.0000 0.0000
```

Figura 12.- Esfuerzo provocado por flexión

Tabla 2.- Tabla de comparaciones entre resultados analíticos y numéricos, de autoridad propia.

	Ansys APDL	Analítico.
Reacción Ay	47,857 N	47,857 N
Reacción By	62,143 N	62,143 N
Momento flexionante máximo	126,492 Nm	126,500 Nm
Fuerza Cortante máximo.	62,142.9 N	62,1423 N
Fuerza Cortante mínimo.	47,857.1 N	47,857 N
Flecha	0.030904 m	0.0308 m
Esfuerzo provocado por flexión máximo	117,620 KPa	117,708 KPa



CONCLUSIONES.

Como se puede observar, la variación de resultados tanto en el programa computacional Ansys APDL estudiantil como los cálculos analíticos, varían muy poco. De esta manera, se ve la precisión con las que este tipo de programas trabajan, además de que, si se utiliza correctamente, se puede ahorrar tiempo en obtener este tipo de análisis.

AGRADECIMIENTOS.

Al Instituto Politécnico Nacional por permitirme ser parte de esta gran institución y brindarme el apoyo necesario para desarrollar y concluir este trabajo de investigación.

Al CONAHCYT por destinar los apoyos necesarios para apoyar la realización de este trabajo.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

- Álvarez-Sánchez, A. G. (2016), El problema elástico en vigas, pp. 9,13,15.
- Beer, F. P., Johnston, E. R. (2015), *Mecánica de Materiales*, séptima edición, Ed. McGraw Hill Education, pp. 4, 302-303.
- Heyman, J. (2002). Vigas y pórticos. Reverte, pp. 2
- Hibbeler, R. C., *Mecánica de Materiales* (2011). 8va Edición. Ed. Pearson, pp 6, 255.
- Monteza-Gamboa, N. (1983), Análisis de pórticos rígidos estáticamente indeterminados por el método de la matriz de desplazamientos, Tesis de grado.
- Mott, R. L. (2009), *Resistencia de Materiales*, 5ta Edición, Ed. Pearson/Prentice Hall, pp 258.
- Nelson, J. K., McCormac, J. C. (2006), *Análisis de estructuras métodos clásico y matricial*, 3ra edición, pp 18-19.
- Torres, S. T., Soto-Sepúlveda, A. (2011), Porqué Leonardo Da Vinci no puede ser considerado un Hombre Ciencia, pp15

INFORMACIÓN ACADÉMICA

Carlos Elías Miguel Ruiz: Alumno de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica del Instituto Politécnico Nacional, ESIME, SEPI Zacatenco México.

Guillermo Urriolagoitia Sosa: Ingeniero Mecánico egresado de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Adolfo López Mateos "Zacatenco". Maestría En Ciencias en el área de Diseño Mecánico con tema en Mecánica de la Fractura en la Sección de Estudios de Posgrado e investigación en la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y eléctrica del Instituto Politécnico Nacional. Maestría en Ingeniería Mecánica con tema en Fatiga por Frotamiento Egresado de la Universidad de Oxford Brookes. PhD Doctorado en filosofía con tema de Esfuerzos Residuales en la Universidad de Oxford Brookes. Actualmente Profesor Investigador de la sección de estudios de posgrado e investigación en la escuela superior e Ingeniería Mecánica y eléctrica del Instituto Politécnico Nacional.

Beatriz Romero Ángeles: Ingeniero Mecánico egresada de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Adolfo López Mateos "Zacatenco". Maestría en Ciencias en Mecánica no Lineal en la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación en la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional. Doctorado en Arresto de Grietas en la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación en la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Actualmente Profesor Investigador de la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación en la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional.

Jacobo Martínez Reyes: Doctor en física de los materiales por la Escuela Superior de Matemáticas.

David Esaú Carbajal López: Alumno de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica del Instituto Politécnico Nacional, ESIME, SEPI Zacatenco México.

Rolando Manuel Jose: Alumno de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica del Instituto Politécnico Nacional, ESIME, SEPI Zacatenco México.

Rodrigo García García: Alumno de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica del Instituto Politécnico Nacional, ESIME, SEPI Zacatenco México.