



Segunda ley de Newton: componentes normal y tangencial, usando el software de análisis de video *Tracker*, bajo el programa PIAPIME ID 1.33.15.22

***Roberto Reyes Arce*¹, *Yesenia Sánchez Fuentes*², *José Castillo Sánchez*³, *Juan Rogelio Castro Sánchez*⁴,
*Norma Daniela Hernández Rodríguez*⁵, *Pablo Osnaya Osnaya*⁶**

RESUMEN

La pandemia COVID 19 puso al descubierto problemas en la enseñanza-aprendizaje en los laboratorios experimentales del departamento de Física de la FESC, quien no contaba con manuales de prácticas de laboratorio para elaborar a distancia, además de lo anterior actualmente los manuales de prácticas de los laboratorios de Cinemática y Dinámica, Física II, Mecánica Clásica solo cuentan con siete prácticas para desarrollar con los alumnos de las asignaturas mencionadas. Como parte del manual de prácticas que se elaboró durante la pandemia, una de ellas es con el tema de la segunda ley de Newton usando componentes normal y tangencial para las asignaturas mencionadas de las carreras de Ingeniería Mecánica Eléctrica, Ingeniería en Telecomunicaciones, Sistemas y Electrónica, Ingeniería Industrial, Ingeniería Agrícola, Tecnología y Química Industrial. El objetivo de la práctica analizar el movimiento de una partícula que describe una trayectoria semicircular en un péndulo, para obtener la velocidad, la aceleración y tensión del cable que sostiene la partícula en cada paso de la trayectoria, mediante la aplicación de un sistema de referencia normal y tangencial, el software de análisis de video *Tracker* [1] y un video del movimiento del péndulo, además de comparar los datos experimentales con los teóricos y calcular los porcentajes de error.

Los resultados obtenidos en la práctica muestran las variaciones de la velocidad, la aceleración y la tensión del cable en función de la posición angular, encontrando sus máximas magnitudes en el punto más bajo de la trayectoria del péndulo excepto la aceleración la cual es mínima en ese punto y por tanto son acorde a lo establecido en la teoría.

ABSTRACT

The COVID 19 pandemic exposed problems in teaching-learning in the experimental laboratories of the Physics department of the FESC, which did not have laboratory practice manuals to prepare remotely, in addition to the above, currently the practice manuals of the Kinematics and Dynamics, Physics II, Classical Mechanics laboratories only have seven practices to develop with the students of the aforementioned subjects. As part of the practice manual that was developed during the pandemic, one of them is on the subject

of Newton's second law using normal and tangential components for the aforementioned subjects of the Electrical Mechanical Engineering, Telecommunications, Systems and Electronics Engineering, Industrial Engineering, Agricultural Engineering, Technology and Industrial Chemistry. The objective of the practice is to analyze the movement of a particle that describes a semicircular trajectory in a pendulum, to obtain the speed, acceleration and tension of the cable that supports the particle in each step of the trajectory, through the application of a reference system. normal and tangential, the *Tracker* video analysis software [1] and a video of the pendulum movement, in addition to comparing the experimental data with the theoretical data and calculating the error percentages. The results obtained in the practice show the variations of the speed, the acceleration and the tension of the cable as a function of the angular position, finding their maximum magnitudes at the lowest point of the pendulum trajectory except the acceleration which is minimum at that point and therefore are in accordance with what is established in the theory.

Palabras claves: Segunda ley de Newton, Tensión, aceleración normal, aceleración tangencial, movimiento de péndulo.

INTRODUCCIÓN

Cuando la trayectoria de movimiento de una partícula es conocida como en el caso del péndulo que tiene las características de ser coplanar y el radio de curvatura constante, como lo menciona Hibbeler (2012) [2] es conveniente hacer el análisis mediante el sistema coordenada normal y tangencial.

La segunda ley de Newton como lo menciona Sears (2009) [3] “para un cuerpo dado, la magnitud de la aceleración es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza neta que actúa sobre el.

$$a = \frac{\Sigma F}{m}$$

En un sistema normal tangencial sus ecuaciones escalares quedan como:

$$\sum F_t = ma_t \quad (1)$$

$$\sum F_n = ma_n \quad (2)$$

* UNAM. FES Cuautitlán, Departamento de Física, 1 Mtro.
roberto_reyes_a@hotmail.com, 2 Mtra. yesna_25@hotmail.com, 3 Ing.

casanj@hotmail.com, 4 Ing. ing.jrcastro@gmail.com, 5 Est.
norma.hrdz.97@gmail.com, 6 Est. pablo.o.po608@gmail.com.



$$\sum F_b = 0 \quad (3)$$

La aceleración tangencial la podemos establecer en términos de los cambios de la velocidad, del radio de curvatura y de la posición angular

$$a_t = v \frac{dv}{ds}$$

$$a_t = v \frac{dv}{\rho d\theta} \quad (4)$$

la cual se encarga de los cambios en la magnitud del vector de velocidad.

La aceleración normal la podemos también escribir en términos de la magnitud de la velocidad y el radio de curvatura

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (5)$$

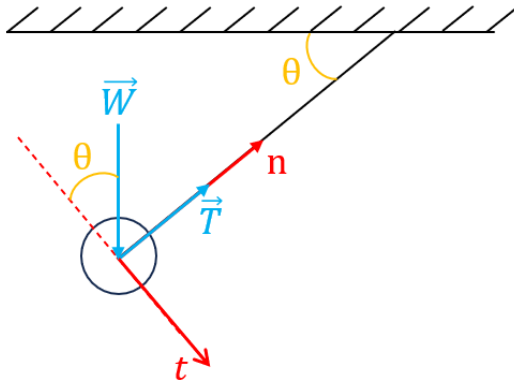
la cual se encarga de los cambios en la dirección del vector de velocidad.

Tensión experimental

El software tracker no tiene la posibilidad de medir fuerza (tensión) por lo que es necesario auxiliarnos de ecuaciones y datos como la velocidad y la posición angular del péndulo para medir la tensión experimental, para esto es necesario considerar el diagrama de cuerpo libre DCL del péndulo en su trayectoria de la Figura 1, el cual nos muestra que dos fuerzas son las que actúan cuando el péndulo se mueve, la tensión del cable y el peso.

Figura 1

Diagrama de cuerpo libre del péndulo



Aplicando la segunda ley de Newton ecuación (2) y la ecuación (5) en el eje normal tenemos:

$$\sum F_n = ma_n = m \frac{v^2}{\rho}$$

$$T - W \sin \theta = m \frac{v^2}{\rho}$$

Despejando la variable de tensión, tenemos que la magnitud de la tensión experimental será:

$$T_e = m \frac{v^2}{\rho} + mg \sin \theta \quad \dots (6)$$

Velocidad teórica

Aplicando la ecuación (1) y (4), en DCL

$$\sum F_t = ma_t = mv \frac{dv}{\rho d\theta}$$

$$mg \cos \theta = mv \frac{dv}{\rho d\theta}$$

Reacomodando valores e integrando

$$\rho g \int_{\theta_0}^{\theta} \cos \theta d\theta = \int_{v_0=0}^v v dv$$

$$\rho g \sin \theta \int_{\theta_0}^{\theta} = \frac{v^2}{2}$$

La velocidad teórica queda como:

$$v^2 = 2\rho g (\sin \theta - \sin \theta_0) \quad \dots (7)$$

Tensión teórica

Sustituyendo la ec. (7) en (6)

$$T = \frac{m}{\rho} (2\rho g \sin \theta - 2\rho g \sin \theta_0) + mg \sin \theta$$

$$T = 2mg \sin \theta - 2mg \sin \theta_0 + mg \sin \theta$$

$$T = (3mg \sin \theta - 2 \sin \theta_0)$$

Finalmente, la tensión teórica queda

$$T_t = mg(3 \sin \theta - 2 \sin \theta_0) \quad \dots (8)$$

Aceleración normal

Sustituyendo la ecuación (7) en la ecuación (5)

$$a_n = \frac{2\rho g (\sin \theta - \sin \theta_0)}{\rho}$$

La aceleración normal queda como:

$$a_n = 2g (\sin \theta - \sin \theta_0) \quad \dots (9)$$

Aceleración tangencial

Aplicando la segunda ley de Newton en el eje tangencial ecuación (1) en el DCL

$$\sum F_t = ma_t$$

$$mg \cos \theta = ma_t$$

Despejando la aceleración tangencial queda como:

$$a_t = g \cos \theta \quad \dots (10)$$

Magnitud del vector de aceleración

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad \dots (11)$$

ANTECEDENTES

Galindo, A. M. A. [4] formularon una didáctica con orientación a prácticas experimentales para la enseñanza de la dinámica del movimiento circular, al investigar cómo se comportan las fuerzas en diferentes situaciones, y cuáles son las causas que provocan el movimiento con base de las bases de la cinemática. Ellos realizaron las actividades experimentales y las grabaron para posteriormente



analizarlas a través del software de análisis de video Tracker. Indicaron que el software es una herramienta buena para integrar la investigación cualitativa y cuantitativa de la cinemática y dinámica. Ellos determinaron que la adición de nuevas tecnologías además del uso de experimentos en la enseñanza es importante, lo que conlleva a que se genere un buen método didáctico de la física y así motivar a una transición de las clases tradicionales, así como incentivar a los alumnos.

La experimentación del tema de *segunda ley de Newton por componentes normal y tangencial con el software de análisis de video Tracker* en las diferentes asignaturas que da servicio el departamento de Física de la FES-Cuautitlán, no se contaba con alguna práctica para impartir en presencial, híbrida o a distancia

DESARROLLO DEL TEMA

Las variaciones de los parámetros mencionados en el movimiento de péndulo, se realizó mediante el software de análisis de video Tracker y un video del movimiento mencionado, para ello se llevó a cabo el siguiente desarrollo:

1. Elaboración de video

Para elaborar el video se tuvo cuidado en varios aspectos de este como (Figura 2):

- Tener una buena iluminación
- Equipo de grabación fijo en un tripee y que este nivelado.
- Grabación de video en al menos 60 fps, necesario para poder tener un rastreo del Tracker adecuado.
- Contraste de colores entre el carrete y el fondo.

Figura 2

Captura de pantalla de video grabado y usado para la práctica



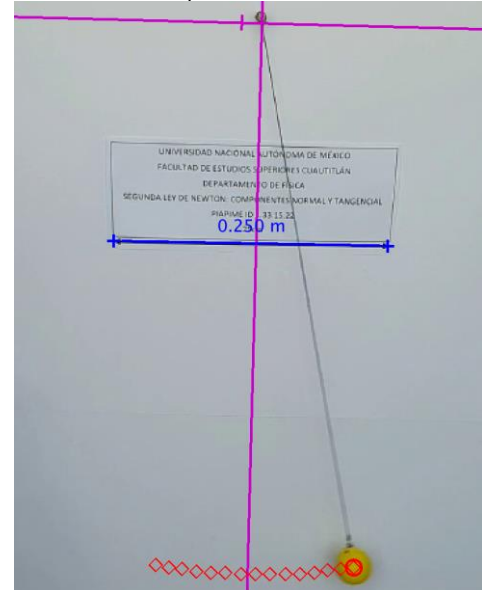
2. Rastreo de puntos del péndulo en Tracker

Una vez elaborado el video se procedió a la configuración del software Tracker mediante el siguiente procedimiento (Figura 3):

- Ajuste de corte de video
- Ajuste en la vara de calibración
- Ubicación de los ejes coordenados
- Generar masa puntal
- Establecer plantilla para rastreo
- Obtener rastreo del movimiento de la pelota

Figura 3

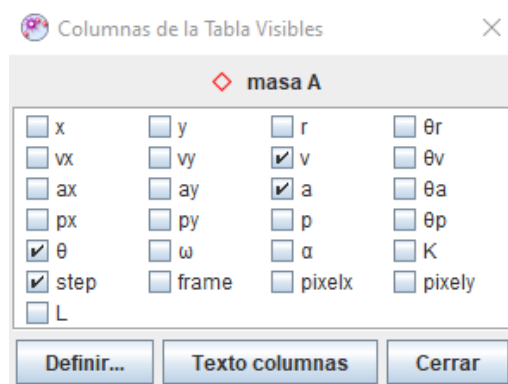
Rastreo del movimiento de péndulo



- Selección de los parámetros posición, velocidad y aceleración (Figura 4).

Figura 4

Selección de parámetros posición angular, velocidad y aceleración y paso



- Medición de la velocidad, posición angular y aceleración experimental del péndulo desde el software Tracker (Tabla 2).



Tabla 1. Medición de velocidad, posición angular y aceleración

Step	Posición angular θ (°)	Velocidad v (m/s)	Aceleración a (m/s ²)
0	68.2	0	
1	68.9	0.2	3.6
2	69.7	0.3	3.32
3	71.4	0.42	3.12
4	72.2	0.48	3.24
5	72.6	0.48	3.11
6	74.2	0.56	2.55
7	75.3	0.6	2.64
8	78.4	0.69	2.36
9	80.4	0.73	1.89
10	81.8	0.75	1.82
11	82.5	0.77	1.63
12	84.1	0.8	1.58
13	87.1	0.81	1.44
14	88.7	0.81	1.42
15	91.9	0.83	1.32
16	98	0.76	1.85
17	98.4	0.75	1.77
18	102.5	0.67	2.24
19	103.4	0.65	2.55
20	103.7	0.63	2.52
21	104.6	0.61	2.71
22	106.8	0.52	2.67
23	107.8	0.49	2.88
24	108.7	0.42	3
25	108.7	0.43	3.3
26	109.4	0.38	3.27
27	110.1	0.32	3.14
28	110.7	0.28	3.37
29	111.2	0.21	3.59

- i) Medición de los valores de la masa de la partícula y radio de curvatura del péndulo (Tabla 1).

Tabla 2. Valor de la masa de la partícula y radio de curvatura

Masa de la partícula m (Kg)	0.179
Radio de curvatura ρ (m)	0.50

Tensión

- j) Cálculo de la tensiones experimentales, teóricas y porcentaje de error (Tabla 3).

Tabla 3. Cálculo de las tensiones experimental, teórica y error

Step	Posición angular θ (°)	Tensión		Error E (%)
		Experimental T_e (N)	Teórica T_t (N)	
0	68.2	1.63	1.63	0
1	68.9	1.65	1.65	0.13
2	69.7	1.67	1.67	0.04
3	71.4	1.72	1.73	0.2
4	72.2	1.75	1.75	0.03
5	72.6	1.75	1.76	0.45
6	74.2	1.8	1.8	0.32
7	75.3	1.82	1.83	0.36
8	78.4	1.88	1.89	0.41
9	80.4	1.92	1.93	0.57
10	81.8	1.93	1.95	0.8
11	82.5	1.95	1.96	0.41
12	84.1	1.97	1.97	0.25
13	87.1	1.98	1.99	0.6
14	88.7	1.98	2	0.74
15	91.9	2	2	0.11
16	98	1.94	1.95	0.58
17	98.4	1.94	1.94	0.44
18	102.5	1.87	1.88	0.47
19	103.4	1.86	1.86	0.09
20	103.7	1.84	1.85	0.55
21	104.6	1.83	1.83	0.16
22	106.8	1.77	1.78	0.12
23	107.8	1.75	1.75	0.14
24	108.7	1.72	1.72	0.12
25	108.7	1.73	1.72	0.07
26	109.4	1.7	1.7	0.03
27	110.1	1.68	1.68	0.04
28	110.7	1.67	1.66	0.15
29	111.2	1.65	1.65	0.07

Velocidad.

- k) Cálculo de la velocidades experimentales, teóricas y porcentaje de error (Tabla 4).



Tabla 4. Cálculo de la velocidad teórica y error

Step	Posición angular θ (°)	Velocidad		Error E (%)
		Experimental v_e (m/s)	Teórica v_t (m/s)	
0	68.2	0	0	
1	68.9	0.2	0.21	6.79
2	69.7	0.3	0.3	1.1
3	71.4	0.42	0.43	2.61
4	72.2	0.48	0.48	0.34
5	72.6	0.48	0.5	4.44
6	74.2	0.56	0.57	2.5
7	75.3	0.6	0.62	2.46
8	78.4	0.69	0.71	2.22
9	80.4	0.73	0.75	2.76
10	81.8	0.75	0.77	3.72
11	82.5	0.77	0.78	1.83
12	84.1	0.8	0.8	1.08
13	87.1	0.81	0.83	2.47
14	88.7	0.81	0.83	3
15	91.9	0.83	0.83	0.44
16	98	0.76	0.78	2.66
17	98.4	0.75	0.77	2.02
18	102.5	0.67	0.68	2.65
19	103.4	0.65	0.66	0.53
20	103.7	0.63	0.65	3.45
21	104.6	0.61	0.62	1.09
22	106.8	0.52	0.53	1.03
23	107.8	0.49	0.48	1.44
24	108.7	0.42	0.42	1.58
25	108.7	0.43	0.43	0.91
26	109.4	0.38	0.38	0.58
27	110.1	0.32	0.32	0.97
28	110.7	0.28	0.26	4.96
29	111.2	0.21	0.2	3.9

Tabla 5. Cálculo de las aceleraciones, normal, tangencial, teórica y error

Step	Aceleración				Error E (%)
	Experimental a_e (m/s ²)	Normal a_t (m/s ²)	Tangencial a_n (m/s ²)	Teórica a_{teo} (m/s ²)	
0	-	0	3.63	3.63	-
1	3.6	0.09	3.52	3.52	2.45
2	3.32	0.18	3.39	3.4	2.23
3	3.12	0.37	3.13	3.15	1.06
4	3.24	0.46	2.98	3.02	7.35
5	3.11	0.51	2.92	2.96	5.13
6	2.55	0.66	2.66	2.74	6.91
7	2.64	0.76	2.48	2.59	1.82
8	2.36	1	1.97	2.21	6.55
9	1.89	1.12	1.63	1.98	4.64
10	1.82	1.2	1.39	1.84	1.12
11	1.63	1.23	1.27	1.77	7.9
12	1.58	1.29	1.01	1.64	3.79
13	1.44	1.37	0.49	1.46	1.49
14	1.42	1.39	0.23	1.41	0.34
15	1.32	1.39	0.32	1.42	7.07
16	1.85	1.21	1.35	1.82	1.96
17	1.77	1.19	1.43	1.86	5.15
18	2.24	0.93	2.12	2.31	3.33
19	2.55	0.86	2.27	2.43	4.83
20	2.52	0.84	2.31	2.46	2.19
21	2.71	0.76	2.47	2.58	4.98
22	2.67	0.56	2.83	2.88	7.27
23	2.88	0.46	2.99	3.02	4.76
24	3	0.36	3.14	3.16	5.22
25	3.3	0.37	3.13	3.15	4.67
26	3.27	0.29	3.25	3.26	0.19
27	3.14	0.2	3.37	3.37	6.96
28	3.37	0.14	3.45	3.45	2.28
29	3.59	0.08	3.53	3.53	1.68

Aceleración

- Cálculo de las aceleraciones tangencial, normal y teórica y porcentaje de error (Tabla 5).

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Componentes horizontales

Los resultados obtenidos para el movimiento de un péndulo en cuanto a la tensión del cable, velocidad y las aceleraciones son los siguientes:

Tensión:

El péndulo parte desde una posición angular inicial de 68°, la tensión en ese punto es de 1.63 N y conforme empieza a descender y aumentar la posición angular la tensión también va aumentando hasta alcanzar su máxima de 2 N en una posición angular de 90°, a partir de ahí la tensión descende conforme empieza a subir el péndulo y alcanza su mínima tensión de 1.65 N en el punto más alto en una posición angular de 111°. En cuanto al cálculo de las tensiones teóricas, como lo podemos observar en la Tabla 3, comparando con los datos obtenidos experimentalmente se puede observar que son muy similares las magnitudes de las tensiones en cada uno de los pasos de la trayectoria del péndulo, teniendo porcentajes de error menores al 1 % que van desde 0 % hasta 0.8 %.



Velocidad:

Para los datos obtenidos de la velocidad en la trayectoria del péndulo se encontraron que van desde una mínima velocidad de cero en la posición inicial de 68° hasta una máxima de 0.83 m/s cuando alcanza el punto más bajo en una posición angular de 90° , a partir de ahí empieza a subir el péndulo provocando que disminuya su velocidad hasta un valor cercano a cero cuando alcanza su máxima altura, en una posición angular de 112° . En cuanto a los cálculos de las velocidades teóricas, son muy similares a los datos medidos en el Tracker, como los podemos observar en la Tabla 4, los porcentajes de error son menores al 7 % y van desde 0.34 % hasta el 6.79 %

Aceleración:

La magnitud teórica del vector de aceleración del péndulo se obtuvo a partir del cálculo teórico de las componentes normal y tangencial encontrando que sus variaciones en el caso de la aceleración normal van desde una mínima de cero cuando inicia el movimiento el péndulo para una posición angular inicial de 68° alcanzando un valor máximo en una posición angular de 90° de 1.39 m/s^2 , volviendo a disminuir a cero cuando alcanza su altura máxima el péndulo en una posición angular de 112° , para la aceleración tangencial los valores obtenidos en el cálculo varían de un valor máximo de 3.63 m/s^2 en la posición angular inicial de 68° , disminuyendo hasta un valor de 0.23 m/s^2 conforme va alcanzando su mínima altura en una posición angular de 90° y aumentando de nuevo hasta un valor de 3.53 m/s^2 conforme alcanza su altura máxima en la posición angular de 112° . En cuanto a la magnitud del vector de aceleración experimental el comportamiento en sus variaciones son similares al de la componentes de la aceleración tangencial van de un máximo de 3.6 m/s^2 a la posición angular de 68° a un mínimo de 1.42 m/s^2 en 90° a un máximo de 3.59 m/s^2 , para el caso del cálculo de la aceleración teórica los valores obtenidos son también muy similares a los experimentales como lo podemos observar en la Tabla 5, por último los porcentajes de error son menores al 8 %, varían desde 0.19 % hasta el 6.96 %.

CONCLUSIONES

Una de las necesidades que tiene actualmente el Departamento de Física de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán es la falta de equipo y material nuevo para el laboratorio derivado del bajo presupuesto que tiene anualmente lo que limita en la compra de equipo para generar nuevas prácticas mismas que también representa una necesidad actual en los laboratorios de Física ya que solo cuenta con siete prácticas relacionadas con los temas de movimiento de los cuerpos y fuerzas que actúan en ellos en las asignaturas de Cinemática y Dinámica, Física II y Mecánica Clásica. La presente práctica junto con otras que se han desarrollado con el software de análisis de video Tracker permite que los estudiantes puedan observar y demostrar los conceptos mencionados sin la necesidad de contar con un equipo, solo es necesario grabar un video con cualquier cámara de un celular y analizarlo en el software de análisis de video Tracker, el cual como ya se mencionó al inicio es de libre acceso para usar y descargar en los sistemas Windows o en IOS. También el alcance del número de estudiantes que pueden manipularlo es mayor ya que cada uno de ellos en sus computadoras

personales o del laboratorio puede analizar los datos obtenidos en el desarrollo de la práctica

Esta práctica junto con otras fue desarrollada por las necesidades que se tuvieron durante la pandemia Covid 19 entre los meses de marzo de 2020 a marzo de 2022, y que tuvieron como objetivo principal brindar prácticas que pudieran llevar a cabo los estudiantes y profesores a distancia, por lo que se pueden desarrollar en forma presencial, híbrida o a distancia, inclusive en asignaturas que no cuenta con laboratorio experimental.

En cuanto a los resultados obtenidos en general todos se acercan a los cálculos teóricos como se menciona en el anterior apartado, demuestran que el uso de del software Tracker junto con videos grabados por cuenta propia es una excelente herramienta y opción para desarrollar experimentos de los temas cinemática y de dinámica, que actualmente no cuenta el manual que se usa en el laboratorio de física.

Las diferencias obtenidas en los parámetros teóricos y experimentales son mínimas, las cuales se atribuyen a la calidad del video (fps) y a la ubicación de los puntos del rastreo que hace el programa.

NOMENCLATURA

F = fuerza neta (N)

a = aceleración (m/s^2)

m = masa (kg)

F_n = fuerza normal (N)

a_n = aceleración normal (m/s^2)

F_t = fuerza tangencial (N)

a_t = aceleración tangencial (m/s^2)

F_b = fuerza binormal (N)

v = velocidad (m/s)

ρ = radio de curvatura (m)

θ = posición angular ($^\circ$)

T = tensión (N)

W = peso (N)

T_e = tensión experimental (N)

g = gravedad (m/s^2)

θ_0 = posición angular inicial ($^\circ$)

T_t = tensión teórica (N)

[1] Brown D., Christian W. y Hanson R. M., *Software Tracker Video Analysis and Modeling Tool* (2023), <https://physlets.org/tracker/>

[2] Hibbeler, R. C., *Mecánica Vectorial para Ingenieros - Dinámica*, 2010, 12ª edición, pp. 32 – 39

[3] Young, H. D., A. F. R., Sears, F. W., Ford, A. L., Zemansky, M. W., & Leal, R. G. (2009). *Física universitaria con física moderna* 12ED. Volumen II

[4] Galindo, A. M. A. (2016). *Prácticas experimentales en la enseñanza de la dinámica del movimiento circular*. Para maestría. Universidad Nacional de Colombia. Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/58205>



INFORMACIÓN ACADÉMICA

Roberto Reyes Arce: Ingeniero Mecánica Electricista de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM, Maestro en Educación de la Universidad del Valle de México

Yesenia Sánchez Fuentes: Ingeniera Mecánica Electricista de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM, Maestra en Ciencias en Ingeniería Metalúrgica de la Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas, del Instituto Politécnico Nacional

José Castillo Sánchez: Ingeniero Mecánico Electricista de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM

Juan Rogelio Castro Sánchez: Ingeniero Mecánico Electricista de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM

Norma Daniela Hernández Rodríguez: Estudiante de la carrera Ingeniería Industrial de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM

Pablo Osnaya Osnaya: Estudiante de la carrera Ingeniería Industrial de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM