Memorias del Congreso Científico Tecnológico de las carreras de
Ingeniería Mecánica Eléctrica, Industrial y Telecomunicaciones, sistemas y electrónica

AÑO 6. No. 6. ISSN-2448-7236. SEPTIEMBRE 2021 – AGOSTO 2022. EM-03, pág.: 1 a la 4.

EM-03

Programa de métodos numéricos equivalentes para encontrar una raíz

Esiquio Martin Gutierrez Armenta*, **José Ángel Lodegario Ortega Herrera*, Beatriz Henrieta Zeifert Soares**, Daniel Flores Sánchez***, Alejandro Cruz Sandoval****y Marco Antonio Gutiérrez Villegas******

RESUMEN

En este artículo se utilizarán algunos algoritmos para encontrar una raíz de una ecuación no lineal, se programas lenguaje C, en todos los métodos presentados se utilizan una primera aproximación por Newton, para continuar sus procedimientos. Uno del primer trabajo en el que se utiliza integración para encontrar la derivada fue realizado por Dennis & Schanbel. (Primera edición en 1983 segunda edición 1996), integra por el método de rectángulo, Weerakoon & T. G. I. (2000), utiliza método el trapecio, demuestran que su método tiene un orden de convergencia cúbica. Para los siguientes métodos se utiliza el mismo principio, estos tienen computacionalmente un orden de convergencia equivalente a la cubica.

ABSTRACT

In this article some algorithms will be used to find a root of a nonlinear equation, C language programs are used, in all the presented methods a first approximation by Newton is used to continue their procedures. One of the first work using integration to find the derivative was done by Dennis & Schanbel. (First edition in 1983 second edition 1996), integrates by the rectangle method, Weerakoon & T. G. I. (2000), uses the trapezoid method, they show that their method has an order of cubic convergence. For the following methods the same principle is used, they have a computationally equivalent order of convergence to cubic.

Palabras claves: raíz, algoritmo, lenguaje C, integración numérica, convergencia cubica, equivalencia.

*Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Instituto Politécnico Nacional Edificio 5, Unidad Profesional Adolfo López Mateos Zacatenco, Col. Lindavista, C.P. 07340, Ciudad de México, México. esiqv11@hotmail.com, ortegaherreraangel@gmail.com

**Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas (ESIQIE) Av. Luis Enrique Erro S/N, Nueva Industrial Vallejo, Gustavo A. Madero, 07738 Ciudad de México, CDMX. bzeifert@yahoo.com

***Universidad Autónoma Metropolitana. Unidad Azcapotzalco Departamento de Materiales, Área de Ciencia de Materiales. Avenida San pablo No 180, Col. Reynosa Tamaulipas, C.P. 02200, Ciudad de México, México. fs.daniel04@gmail.com

****Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco Departamento de Sistemas, Área Sistemas Computacionales. Avenida San pablo No 180, Col. Reynosa Tamaulipas, C.P. 02200, Ciudad de México, México. magv@correo.azc.uam.mx

INTRODUCCIÓN

En diversos problemas de las ciencias básicas, Biológicas, de la salud, sociales, economía y administrativas, se encuentran problema en la que se deben encontrar un punto que se debe saber si es máximo o mínimo, aquí es donde se utilizan estos métodos para obtener el valor aproximado de la raíce, en este caso se quiere saber comportamiento de ese fenómeno, alrededor de este, de aquí la necesidad de tener métodos sencillos de programar que se aproximen rápidamente a la raíz en pocas iteraciones. En este artículo se describen varios métodos que tienen un orden equivalente al de orden de convergencia cubica. Se consideran las siguientes cuestiones teóricas.

Dada la función, $f: I \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ en un intervalo abierto $I_{(a,b)}$, que cumple $f(\alpha)=0$ y $f'(\alpha)\neq 0$, $\alpha \in \mathrm{R}$. El método de Newton para aproxima una raíz simple de una ecuación no lineal $f(x)=0$ viene dada la forma iterativa por Ec. (1):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

Gutiérrez et al., (2019), el método tiene convergencia cuadrática. En el artículo de Weerakoon y T. G. I. (2000), en la Ec. (2).

$$f(x) = f(x_n) + \int_{x_n}^{x} f(\lambda)\,d\lambda \tag{2}$$

Contiene una integral, esta es aproximada utilizando el método del trapecio para la integral indefinida.

$$\int_{x_n}^{x} f(\lambda)\,d\lambda \approx \frac{1}{2}(x-x_n)\left(f'(x_n)+f'(x)\right) \tag{3}$$

La Ec. (2). Sustituida en Ec. (3). se obtiene Ec. (4).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n)+f'(y_n)} \tag{4}$$

Donde:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5}$$

Demuestran que su orden convergencia viene dado por la Ec. (6).

$$e_{n+1} = \left(C_2^2 + \frac{1}{2}C_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right) \tag{6}$$

Para utilizar este método se da un punto inicial x_0, un criterio de paro se puede utilizar $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$ o $|f(x_0)| \le \varepsilon$, donde a ε es tolerancia. El desarrollo se sigue los siguientes pasos en siguiente algoritmo.

METODOLOGÍA Y DESARROLLO

Utilizando el método de Newton y el artículo de Weerakoon y T. G. I. [8]), en este se utiliza el método del trapecio para aproximar la derivada, Nazneen [1], realiza el mismo proceso que Weerakoon y T. G. I. [8], aquí utiliza para calcular la integra el método de Simpson un tercio con punto medio. A partir de estos procedimientos se obtienen otros métodos. Que computacionalmente tienen un comportamiento de convergencia cubica.

Algoritmo 1. Weerakoon y T. G. I

Inicio.
Entrada
x_0, ε
Paso 1

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Paso 2

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)}$$

Paso 3

Si $|x_{n+1} - x_n| > \varepsilon$ regresa al paso 1. De lo contrario imprime x_{n+1}

Fin.

Una modificación para este método utilizando la Ec. (7) y sustituyendo en el paso dos $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'\left(\dfrac{x_n + y_n}{2}\right)}$ se obtiene otro método derivado de este algoritmo 1.1. Donde la integración es el método del rectángulo con punto medio, o la media aritmética.

Nazneen [1], utiliza el método de Simpson un tercio punto medio, tiene un error de:

$$e_{n+1} = -e_n + \frac{14}{3}C_2 e_n^2 - \left(\frac{212C_n^2 - 108C_3}{9}\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)$$

Este método tiene de orden de convergencia de primer orden, pero el método de Newton es de orden cuadrático de convergencia, pero su tasa de convergencia se aproxima al orden cubico.

Algoritmo 2. Nazneen.

Inicio.
Entrada
x_0, ε
Paso 1

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Paso 2

$$y_n = \frac{x_n + z_n}{2}$$

Paso 3

$$x_{n+1} = x_n - \frac{6f(x_n)}{f'(x_n) + 4f'(y_n) + f'(z_n)}$$

Paso 4

Si $|x_{n+1} - x_n| > \varepsilon$ regresa al paso 1. De lo contrario imprime x_{n+1}

Fin.

En el artículo de Merikoski, Halmtrtoa y Tossavainen [6], utilizado para demostración de una desigualdad la Ec. (7).

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f'(a) + f'(b)}{2} \tag{7}$$

Se puede utilizar en el paso 3 la forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{6f(x_n)}{f'(x_n + z_n) + 4f'(y_n)}$$

Obteniendo otro método equivalente. Obteniendo otro algoritmo 2. Gutiérrez et al. [2, 3], obtuvieron una familia realizando la misma metodología, pero en este caso utiliza el método de la cuadratura de Gauss-Legendre para realizar la integración. Para un caso particular solo se utilizan dos abscisas, así como dos pasos.

Algoritmo 3. Gutierrez

Inicio.
Entrada
x_0, ε
Valores de la cuadratura de Gauss-Legendre

$$t_1 = 0.5773592692;\ t_2 = -0.5773592692\ (\text{Abscisas}).$$

$$w_1 = w_2 = 1;\ (\text{pasos}).$$

Paso 1

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Paso 2

$$y_{n1} = 0.5(z_n - x_n)t_1 + 0.5(z_n - x_n)$$

$$y_{n2} = -0.5(z_n - x_n)t_2 + 0.5(z_n - x_n)$$

Paso 3

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(y_{n1}) + f'(y_{n2})}$$

Paso 4

Si $|x_{n+1} - x_n| > \varepsilon$ regresa al paso 1. De lo contrario imprime x_{n+1}

Fin.

Utilizando la ecuación 7, en el paso 3 cambiando el divisor por $f'\left(\frac{y_{n1} + y_{n2}}{2}\right)$ se obtiene otro método.

Métodos propuestos por Gutiérrez et al. [4], utiliza las medias para obtener métodos para calcular una raíz simple, estas cumplen la siguiente relación demostradas por Da-Feng Xia, Sen-Lin y Feng Qi. [9]. Otra demostración dada por Ilhan M. Izmirli [5], Vedat Saglam et al. [7], realizan una comparación y estos estimadores, Dada por la ecuación (8).

$$0 < \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \le \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \le \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} \tag{8}$$

También se tiene que estas son equivalentes ya que existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ tal que la Ec. (8) se escribe como:

$$0 < \alpha \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \beta\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} = \gamma \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \delta\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} \tag{9}$$

Se desarrollan estos. Primero utilizando la media armónica:

$$H = \frac{2*\left(x_{n+1}^* + x_n\right)}{x_{n+1}^* * x_n} \tag{10}$$

$$f'\left(\frac{2*\left(x_n + x_{n+1}^*\right)}{x_n * x_{n+1}^*}\right) \tag{11}$$

Sustituyendo Ec. (11) en el divisor de Ec. (4). Se obtiene otro método.

Utilizando la media geométrica:

$$G = \sqrt{x_n * x_{n+1}^*} \tag{12}$$

$$f'\left(\sqrt{x_n * x_{n+1}^*}\right) \tag{13}$$

Remplazando Ec. (13) en el divisor de Ec. (4). También se obtiene otro método.

Para la media cuadrática:

$$Q = \sqrt{\frac{x_n^2 + \left(x_{n+1}^*\right)^2}{2}} \tag{15}$$

$$f'\left(\sqrt{\frac{x_n^2 + \left(x_{n+1}^*\right)^2}{2}}\right) \tag{16}$$

La Ec. (16) se remplaza por el divisor Ec. (4). Se tiene otra variante. En los algoritmos se proporciona un valor inicial x_0, la raíz la cual se aproxima por los algoritmos es x_{n+1} el error entre las aproximaciones está dado por $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$, o $|f(x_{n+1})| \le \varepsilon$ también se utiliza como criterio de paro del método.

RESULTADOS

En la integración numérica para el método de Weerakoon & Fernando se utiliza una franja, el método de Nazneen utilizan tres franjas, en cada iteración en su procedimiento. Demostraron que sus métodos tienen convergencia cubico, se observan que computacionalmente los otros métodos obtenidos, la mayoría tienen este mismo orden de convergencia, en estos necesitan evaluar la derivada dos veces en cada iteración en otros casos estos solo necesitan sólo una evaluación de esta.

Para poder compartir los códigos y la información mandar mensaje al correo esiqv11@hotmail.com del autor ya que son muy largos y pesados para poner en el trabajo.

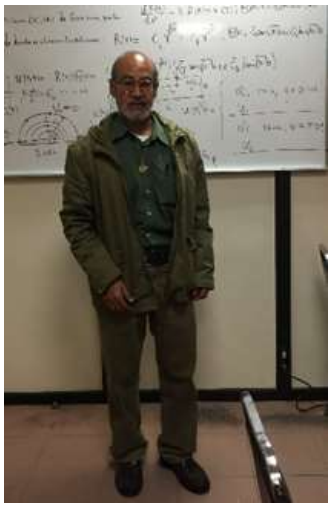
CONCLUSIONES.

En la ecuación 8 se tiene la desigualdad de las medias, se puede demostrar que estas son equivalentes donde se pueden encontrar constantes positivas que cumplen la relación de ecuación 9, los métodos se programaron en lenguaje C, estos pueden ser utilizados por cualquier persona ya que el código será libre.

AGRADECIMIENTOS

Los autores, agradecen al Instituto Politécnico Nacional, al departamento de Sistemas de la UAM-A por el apoyo otorgado al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) para cursar la maestría en Ciencias en Ingeniería, así como el Doctorado en Ingeniería, respectivamente. al Congreso de Ingeniería en FESC. Dr. Víctor Hugo Hernández Gómez

Este trabajo se hace en memoria por el lamentable fallecimiento del doctor José Ángel Lodegario Ortega Herrera. Esposo, padre, amigo, consejero y la persona más humana, responsable y lista que hemos conocido descanse en paz. Gracias por todo su apoyo en estos años.



REFERENCIAS.

[1] Nazneen, S. (2018). A New Approach of Newton's Method using Simpson's Rule, Asian Journal of Applied Science and Technology (AJAST) (Open Access Quarterly International Journal) Volume 2, Issue 1, Pages 135-138.

[2] Gutierrez, E., Gutiérrez, M., Gutiérrez, D., Gutiérrez M.A., Gutiérrez, J., y Gutiérrez, I., (2019, 14 de Agosto). Demostración del orden de convergencia del método de Newton y de Steffensen´s para aproximar una raíz simple, Editor responsable: Lic. Mario Chavarría Castañeda., No. 04-2017-050311035400-203, ISSN: 2594-1011, Año: 24, No. 24, pp.223-225.

[3] Gutiérrez, E., Gutiérrez, M., Gutiérrez, M. A., Sánchez, D., Ortega, J., y Cruz, A., (2019 septiembre – 2020 agosto). Familia del método de Newton utilizando cuadratura de Gauss-Legendre modificado para aproximar una raíz simple, Memorias del Congreso Científico Tecnológico de las carreras de Ingeniería Mecánica Eléctrica, Industrial y Telecomunicaciones, sistemas y electrónica, año 4. no. 4. ISSN-2448-7236. Em-01, pp. 1 -7.

[4] Gutiérrez, E., Gutiérrez, M., Ortega, J., Gutiérrez A., Tabares, S., Figueroa, J., Flores. (2020, 25 octubre). Método para Resolver Ecuaciones no Lineales Basado en Newton Utilizando la Media, memorias de la reunión nacional académica de física y matemáticas, ISSN: 2594-1011, año 25 número 25, pp. 81-87.

[5] Izmirli, I. (2013, May). An Elementary Proof of the Mean Inequalities, Advances in Pure Mathematics, 3, pp. 331-334 http://dx.doi.org/10.4236/apm.2013.33047 Published Online http://www.scirp.org/journal/apm), Scientific Research.

[6] Merikoski, J. K., Halmtrtoa, Markku, y Tossavainen. Timo. (2009,15 September), Means and the mean value theorem, International Journal of Mathematical Education in Science and technology, vol 40, No.6, pp. 729-740, editorial Taylor & Francis Group.

[7] Sağlam, V., Zaman. T., Yücesoy, E., Sağır M. (2016 June). Estimators Proposed by Geometric Mean, Harmonic Mean and Quadratic Mean, Science Journal of Applied Mathematics and Statistics,Volume 4, Issue 3, Pages: 115-118.

[8] Weerakoo Sunethra, T. G. I. Fernando. (2000), A Variant of Newton's Method Whit Accelerated Third-order convergence, Applied Mathematics leters 13 97-93 editorial Pergamon.

[9] Xia, Da-Feng., Lin, Sen., y Qi, Feng., (1999), A proof of the arithmetic mean –geometric mean-harmonic mean inequalites, RGMIA Research Report Collection, Vol. 2 No. 1, http://ajmaa.org/RGMIA/papers/v2n1/v2n1-10.pdf.

INFORMACIÓN ACADÉMICA

Esiquio Martin Gutierrez Armenta: Ingeniero Mecánico egresado de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Azcapotzalco del Instituto Politécnico Nacional. Grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica en la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación Escuela Superior de Ingeniería Mecánica actualmente cursando el último semestre de doctorado.

†José Ángel Lodegario Ortega Herrera†: es un Licenciado en Matemáticas y Física, se graduó en el Instituto de Matemática Pura y Aplicada (Rio de Janeiro, Brasil), y grado de Doctor en el Instituto de Matemáticas, Estadística y Computación Científica Campinas, Brasil). Es profesor e investigador de la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación (SEPI-ESIME-IPN Zacatenco) desde el año 1969 en el programa de Ingeniería Mecánica.

Beatriz Henrieta Zeifert Soares: Doctora y docente de la Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas (ESIQIE).

Daniel Flores Sánchez: Ingeniero Metalúrgico en la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica en el Instituto Politécnico Nacional. Actualmente realiza estudios de Doctorado en la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco.

Alejandro Cruz Sandoval: Ingeniero en electrónica por la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco Grado de Maestría en ciencias por el CINVSETAV-IPN Grado de Doctor en Ciencias por el CINVESTV-IPN

Marco Antonio Gutiérrez Villegas: Licenciatura y Maestría en Matemáticas en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional. grado de Maestro en Ciencias y Doctorado en Ingeniería Mecánica en el Instituto Politécnico Nacional de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Sección de Estudios de Posgrado e Investigación Unidad Zacatenco.