

Análisis de la aproximación del modelo dinámico de orden fraccionario de un circuito RC

Mario Alberto Hernández Soriano
*Departamento de Ingeniería
 Mecatrónica
 Tecnológico de Estudios Superiores de
 Coacalco*
 Av.16 de septiembre No. 54, Coacalco
 de Berriozábal, Estado de México
 mario_mct@tesco.edu.mx

Israel Alejandro Pérez Luna
*Departamento de Ingeniería
 Mecatrónica
 Tecnológico de Estudios Superiores de
 Coacalco*
 Av.16 de septiembre No. 54, Coacalco
 de Berriozábal, Estado de México
 202120118@tesco.edu.mx

Roberto Domínguez López
*Departamento de Ingeniería
 Mecatrónica
 Tecnológico de Estudios Superiores de
 Coacalco*
 Av.16 de septiembre No. 54, Coacalco
 de Berriozábal, Estado de México
 roberto_mct@tesco.edu.mx

José de Jesús Rubio Ávila
*Sección de Estudios de Posgrado e
 Investigación, ESIME Azc.
 Instituto Politécnico Nacional*
 Av. de las Granjas no. 682, Col. Santa
 Catarina, Ciudad de México
 rubio.josedejesus@gmail.com

Alejandro Zacarías Santiago
*Sección de Estudios de Posgrado e
 Investigación, ESIME Azc.
 Instituto Politécnico Nacional*
 Av. de las Granjas no. 682, Col. Santa
 Catarina, Ciudad de México
 azacariass@gmail.com

Ricardo A. Balcázar Montes de Oca
*Departamento de Ingeniería
 Mecatrónica
 Tecnológico de Estudios Superiores de
 Coacalco*
 Av.16 de septiembre No. 54, Coacalco
 de Berriozábal, Estado de México
 alejandro.balcazar@tesco.edu.mx

Resumen—En este trabajo se realiza el análisis matemático del modelo dinámico de carga y descarga de un capacitor utilizando el operador de derivada de orden fraccionario bajo el enfoque de Riemann-Liouville, para el análisis se muestra la comparación de datos experimentales de carga y descarga, la aproximación de las ecuaciones clásicas y la aproximación de las ecuaciones bajo el enfoque del cálculo de orden fraccionario. Los resultados obtenidos en las aproximaciones y datos experimentales son analizados y comparados mediante los índices de desempeño IAE, ITAE, ISE, ITSE y RMSE.

Keywords—Modelado dinámico, Cálculo fraccionario, circuito RC, carga y descarga de un capacitor

I. INTRODUCCIÓN

La historia del cálculo fraccionario tiene su comienzo a finales del siglo XVII, mientras L'Hopital y Leibniz se escribían cartas, siendo el 30 de septiembre de 1695 cuando L'Hopital le escribe a Leibniz la siguiente pregunta "¿Qué pasaría si el orden de la derivada $d^n f(x)/dx^n$ fuera $1/2$?" a lo que Leibniz le respondería "Una aparente paradoja, de la cual algún día se extraerán fructíferas consecuencias" [1].

Hasta este momento, no se había presentado ninguna aplicación de estos operadores fraccionarios. Entonces cuando Niels Abel en 1823, utiliza la derivada de orden $n = 1/2$ para resolver la ecuación integral del problema de la braquistócrona (Dados dos puntos en un plano vertical a diferente altura, hallar la curva por la que una partícula móvil descendiendo solo por su propio peso, alcanzaría el punto inferior en el menor tiempo posible) [2].

A partir de entonces y con especial énfasis en las últimas cuatro décadas, el cálculo fraccionario se ha empleado con éxito en el modelado de fenómenos y sistemas físicos estudiados en multitud de campos de la ciencia y la ingeniería. Entre ellos se pueden destacar la biología [2], circuitos eléctricos [3], dinámica social [4], Estudios de terremotos [5], Finanzas [6], Sistemas mecánicos [7], Mecánica de materiales [8], hidrología [9], Teoría fractal [10], Teoría de control [11], [12], entre otros.

En los artículos [13], [14] y [15] se puede observar que el análisis de capacitores en circuitos RC ha sido trabajado en donde muestran gráficamente la respuesta de carga y descarga del capacitor utilizando el operador de derivada fraccionario con diferentes ordenes, sin embargo, en ningún caso se utilizan modelos estadísticos que analicen el orden de la derivada fraccionaria con mejor aproximación.

En los artículos [16], [17], [18], [19] y [20] se muestran investigaciones recientes, en donde, se realizan propuestas enfocadas al diseño y análisis de controladores para sistemas dinámicos, hasta el momento todas las propuestas son basadas a nivel simulación, en donde, se han demostrado resultados interesantes.

II. CONCEPTOS BÁSICOS DEL CÁLCULO FRACCIONARIO

A. Funciones básicas

En matemáticas existen dos funciones muy conocidas y bastante utilizadas, la primera de ellas es la función factorial para un número entero positivo n definida como $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$, por otro lado, la función exponencial $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$, está definida como una serie de potencias que involucra una función factorial.

Para el caso de la función factorial existe una limitante en el contexto del cálculo fraccionario, su cálculo sólo es útil para números enteros positivos, sin embargo, en este enfoque se requiere el cálculo de la función factorial para números no enteros.

Dos funciones que generalizan el cálculo de la función factorial y la función exponencial tanto para números enteros como para números no enteros son introducidas a continuación.

Función Gamma

La función Gamma [21] es una generalización de la función factorial $n!$, es denotada por $\Gamma(z)$ en donde z se extiende a números no enteros e inclusive a números

complejos, la definición de esta función se expresa en la ecuación (1):

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (1)$$

Función Mittag-Leffler

La función de Mittag-Leffler [22] es una función generalizada que depende de dos parámetros α y β y de acuerdo con el valor de estos parámetros, esta función es capaz de expresar el comportamiento de diferentes funciones [23], [11] la definición de esta función se expresa en la ecuación (2):

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \equiv E_{\alpha}(z) \quad (2)$$

B. Operador de derivada e integral fraccionaria

La generalización de orden no entero de las definiciones clásicas para los operadores

Integral fraccionaria de Riemann-Liouville

El operador de la integral fraccionaria en sentido de Riemann-Liouville se define en la ecuación (3):

$${}^{RL}_0 I_t^{\gamma} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} f(\tau) d\tau \quad (3)$$

en donde, ${}^{RL}_0 I_t^{\gamma}$ denota el operador integral, $\gamma > 0 \in \mathbb{R}$ indica el orden de integración, los subíndices 0 y t denotan los límites de integración y el subíndice RL denota que la integral es en sentido de Riemann-Liouville.

Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

El operador de la derivada fraccionaria en sentido de Riemann-Liouville se define en la ecuación (4):

$${}^{RL}_0 D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (4)$$

en donde, ${}^{RL}_0 D_t^{\alpha}$ denota el operador de derivada, $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$ indica el orden de derivación, los subíndices 0 y t denotan los límites de la derivada y el subíndice RL denota que la derivada es en sentido de Riemann-Liouville.

Derivada fraccionaria de Liouville-Caputo

El operador de la derivada fraccionaria en sentido de Liouville-Caputo se define en la ecuación (5):

$${}^C_0 D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (5)$$

en donde, ${}^C_0 D_t^{\alpha}$ denota el operador de derivada, $n-1 < \alpha < n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ indica el orden de derivación, los subíndices 0 y t denotan los límites de la derivada y el subíndice C denota que la derivada es en sentido de Liouville-Caputo.

Derivada fraccionaria de Grünwald Letnikov

El operador de la derivada fraccionaria en sentido de Grünwald Letnikov se define en la ecuación (6):

$${}^{GL}_{t_0} D_t^{\gamma} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\gamma}} \sum_{j=0}^{\frac{t-t_0}{h}} (-1)^j \binom{\gamma}{j} f(t-jh) \quad (6)$$

en donde, ${}^C_0 D_t^{\alpha}$ denota el operador de derivada, $n-1 < \gamma < n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ indica el orden de derivación, los subíndices t_0 y t denotan los límites de la derivada y el subíndice GL denota que la derivada es en sentido de Grünwald Letnikov.

III. ANÁLISIS DE CARGA Y DESCARGA DE UN CAPACITOR

A. Análisis de carga método clásico

Considerando el circuito RC que se muestra en la Fig. 1:

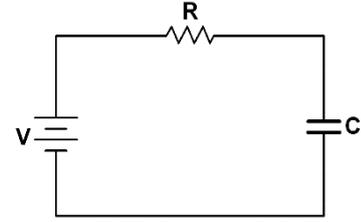


Fig. 1. Circuito RC

se puede considerar que la corriente en la resistencia R y la corriente en el capacitor C es la misma, como se muestra en la ecuación (7):

$$i_R = i_C \quad (7)$$

en donde, por ley de Ohm se puede expresar la corriente como:

$$i_R = \frac{V - V_C}{R} \quad (8)$$

y la corriente en el capacitor es determinada por:

$$i_C = C \frac{d}{dt} V_C \quad (9)$$

sustituyendo (8) y (9) en la ecuación (7):

$$\frac{V - V_C}{R} = C \frac{d}{dt} V_C \quad (10)$$

acomodando los términos de la ecuación (10) como se muestra en la ecuación (11):

$$\frac{d}{dt} V_C + \frac{V_C}{RC} = \frac{V}{RC} \quad (11)$$

la ecuación (11) es una ecuación diferencial que puede ser resuelta para obtener la dinámica de carga del capacitor $V_C(s)$ mediante el método de la transformada de Laplace como se observa en el procedimiento de las ecuaciones (12) a (16):

$$sV_C(s) + \frac{1}{RC} V_C(s) = \frac{1}{RC} V \quad (12)$$

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right)V_c(s) = \frac{1}{RCs}V \quad (13)$$

$$V_c(s) = \frac{V}{RCs\left(s + \frac{1}{RC}\right)} \quad (14)$$

$$V_c(s) = V \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)} \right] \quad (15)$$

la ecuación (16) muestra la ecuación del voltaje de carga del capacitor $V_c(t)$ para un voltaje de entrada V :

$$V_c(t) = V \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right] \quad (16)$$

B. Análisis de descarga método clásico

Partiendo de la ecuación (11), pero considerando que la fuente de voltaje de entrada es apagada, es decir, $V = 0$ y que el capacitor cuenta con un voltaje inicial $V_{C(0)}$:

$$\frac{d}{dt}V_c + \frac{V_c}{RC} = 0 \quad (17)$$

Aplicando el método de la transformada de Laplace y considerando la condición inicial $V_{C(0)}$, podemos resolver la ecuación (18) como se observa en el procedimiento de las ecuaciones (19) a (22):

$$sV_c(s) + \frac{1}{RC}V_c(s) = 0 \quad (18)$$

$$sV_c(s) - V_{C(0)} + \frac{1}{RC}V_c(s) = 0 \quad (19)$$

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right)V_c(s) = V_{C(0)} \quad (20)$$

$$V_c(s) = \frac{V_{C(0)}}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)} \quad (21)$$

la ecuación (22) muestra la ecuación de descarga del capacitor $V_c(t)$:

$$V_c(t) = V_{C(0)}e^{-\frac{t}{RC}} \quad (22)$$

C. Método de carga análisis fraccionario

Considerando la constante de tiempo de Planck en el operador de derivada fraccionario $t_p^{1-\gamma}$ de orden γ como se muestra en la ecuación (23):

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{1}{t_p^{1-\gamma}} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \quad (23)$$

Reemplazando el operador de derivada de orden fraccionario (23) en la ecuación (11) se obtiene (24) que corresponde a la ecuación diferencial de orden fraccionario de orden γ :

$$\frac{1}{t_p^{1-\gamma}} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} V_c + \frac{V_c}{RC} = \frac{V}{RC} \quad (24)$$

Aplicando el método de la transformada de Laplace en (24) y siguiendo el desarrollo mostrado en las ecuaciones (25) a (29):

$$s^\gamma V_c(s) + \frac{t_p^{1-\gamma}}{RC} V_c(s) = \frac{t_p^{1-\gamma}}{RCs} V \quad (25)$$

$$\left(s^\gamma + \frac{t_p^{1-\gamma}}{RC}\right) V_c(s) = \frac{t_p^{1-\gamma}}{RCs} V \quad (26)$$

$$V_c(s) = \frac{t_p^{1-\gamma} V}{RCs \left(s^\gamma + \frac{t_p^{1-\gamma}}{RC}\right)} \quad (27)$$

considerando $\tau = \frac{t_p^{1-\gamma}}{RC}$

$$V_c(s) = \frac{\tau V}{s(s^\gamma + \tau)} \quad (28)$$

descomponiendo en fracciones parciales se obtiene

$$V_c(s) = V \left[1 - E_\gamma(-\tau t^\gamma) \right] \quad (29)$$

D. Método de descarga análisis fraccionario

Partiendo nuevamente de la ecuación (11) considerando que la fuente de voltaje de entrada es apagada, es decir, $V = 0$, que el capacitor cuenta con un voltaje inicial $V_{C(0)}$ y reemplazando el operador de derivada por el operador de derivada de orden fraccionario (23) obtenemos en (30) la ecuación diferencial de orden fraccionario de orden γ :

$$\frac{1}{t_p^{1-\gamma}} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} V_c + \frac{V_c}{RC} = 0 \quad (30)$$

Aplicando el método de la transformada de Laplace en (30) y siguiendo el desarrollo mostrado en las ecuaciones (31) a (34):

$$s^\gamma V_c(s) + \frac{t_p^{1-\gamma}}{RC} V_c(s) = 0 \quad (31)$$

considerando $\tau = \frac{t_p^{1-\gamma}}{RC}$

$$s^\gamma V_c(s) - V_{C(0)} + \tau V_c(s) = 0 \quad (32)$$

$$V_c(s) = \frac{V_{C(0)}}{(s^\gamma + \tau)} \quad (33)$$

descomponiendo en fracciones parciales se obtiene

$$V_c(s) = V_{C(0)} E_\gamma(-\tau t^\gamma) \quad (34)$$

IV. RESULTADOS

A. Análisis de carga y descarga experimental

En la Fig. 2 se muestra la gráfica con los resultados obtenidos experimentalmente, los resultados de la aproximación obtenidos mediante el análisis del cálculo clásico y los resultados obtenidos mediante la aproximación del análisis del cálculo fraccionario de orden $\gamma = 0.998$ que corresponden a la carga de un capacitor de 1000uF en un circuito RC con una resistencia de 10kΩ y un voltaje de carga de $V = 7.59v$. El orden γ se determinó empíricamente buscando una mejor aproximación respecto a los resultados experimentales.

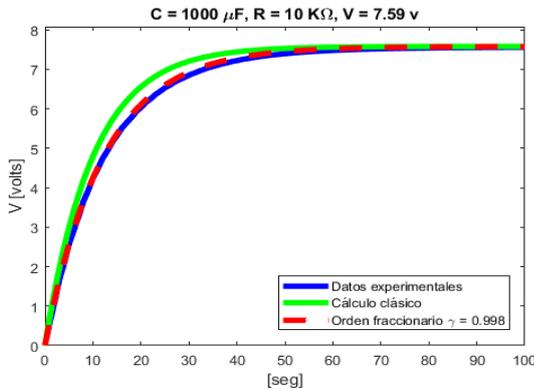


Fig. 2. Carga de un Capacitor de 1000uF

En la Tabla 1 se muestra el análisis por medio de los índices de desempeño IAE, ITAE, ISE, ITSE y RMSE para los resultados obtenidos de carga del capacitor de 1000uF en donde se demuestra que la aproximación utilizando el análisis con el enfoque de cálculo fraccionario caracteriza mejor el comportamiento de carga del capacitor.

Tabla 1. Análisis de carga de un capacitor de 1000uF

	IAE	ITAE	ISE	ITSE	RMSE
Clásico	21.2023	584.6238	8.1952	162.9456	0.2849
Fraccionario	4.2515	187.9051	0.2304	8.8532	0.0478

En la Fig. 3 se muestra la gráfica con los resultados obtenidos experimentalmente, los resultados de la aproximación obtenidos mediante el análisis del cálculo clásico y los resultados obtenidos mediante la aproximación del análisis del cálculo fraccionario de orden $\gamma = 0.998$ que corresponden a la descarga de un capacitor de 1000uF en un

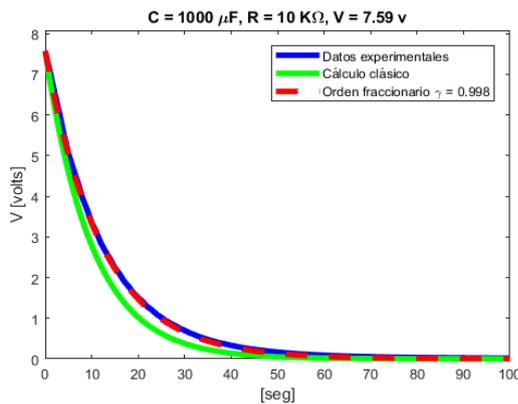


Fig. 3. Descarga de un capacitor de 1000uF

circuito RC con una resistencia de 10kΩ y un voltaje inicial en el capacitor de $V_{C(0)} = 7.59v$. El orden γ se determinó empíricamente buscando una mejor aproximación respecto a los resultados experimentales.

En la Tabla 2 se muestra el análisis por medio de los índices de desempeño IAE, ITAE, ISE, ITSE y RMSE para los resultados obtenidos de descarga del capacitor de 1000uF en donde se demuestra que la aproximación utilizando el análisis con el enfoque de cálculo fraccionario caracteriza mejor el comportamiento de descarga del capacitor.

Tabla 2. Desempeño de descarga de un capacitor de 1000uF

	IAE	ITAE	ISE	ITSE	RMSE
Clásico	20.3339	527.2059	7.9117	142.9133	0.2799
Fraccionario	3.3943	130.7488	0.1636	4.0140	0.0403

En la Fig. 4 se muestra la gráfica con los resultados obtenidos experimentalmente, los resultados de la aproximación obtenidos mediante el análisis del cálculo clásico y los resultados obtenidos mediante la aproximación del análisis del cálculo fraccionario de orden $\gamma = 0.998$ que corresponden a la carga de un capacitor de 330uF en un circuito RC con una resistencia de 10kΩ y un voltaje de carga de $V = 7.59v$. El orden γ se determinó empíricamente buscando una mejor aproximación respecto a los resultados experimentales.

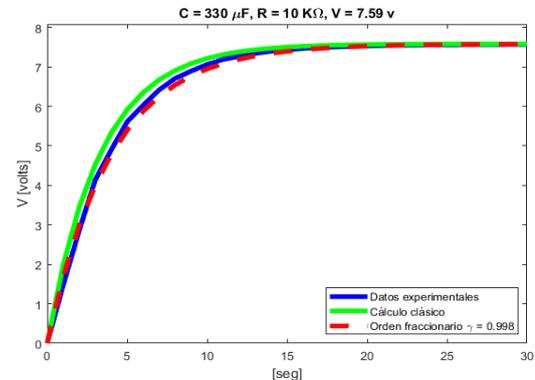


Fig. 4. Carga de un capacitor de 330uF

En la Tabla 3 se muestra el análisis por medio de los índices de desempeño IAE, ITAE, ISE, ITSE y RMSE para los resultados obtenidos de carga del capacitor de 330uF en donde se demuestra que la aproximación utilizando el análisis con el enfoque de cálculo fraccionario caracteriza mejor el comportamiento de carga del capacitor.

Tabla 3. Desempeño de carga de un capacitor de 330uF

	IAE	ITAE	ISE	ITSE	RMSE
Clásico	4.2423	31.4274	1.3741	6.1703	0.2105
Fraccionario	1.8362	15.2394	0.2639	1.6746	0.0923

En la Fig. 5 se muestra la gráfica con los resultados obtenidos experimentalmente, los resultados de la aproximación obtenidos mediante el análisis del cálculo clásico y los resultados obtenidos mediante la aproximación del análisis del cálculo fraccionario de orden $\gamma = 0.998$ que corresponden a la descarga de un capacitor de 330uF en un circuito RC con una resistencia de 10kΩ y un voltaje inicial en el capacitor de $V_{C(0)} = 7.59v$. El orden γ se determinó

empíricamente buscando una mejor aproximación respecto a los resultados experimentales.

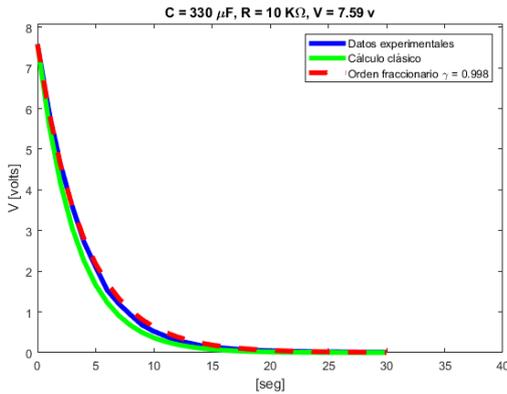


Fig. 5. Descarga de un capacitor de 330uF

En la Tabla 4 se muestra el análisis por medio de los índices de desempeño IAE, ITAE, ISE, ITSE y RMSE para los resultados obtenidos de descarga del capacitor de 330uF en donde se demuestra que la aproximación utilizando el análisis con el enfoque de cálculo fraccionario caracteriza mejor el comportamiento de descarga del capacitor.

Tabla 4. Desempeño de descarga de un capacitor de 330uF

	IAE	ITAE	ISE	ITSE	RMSE
Clásico	4.2301	31.2562	1.3741	6.9188	0.2105
Fraccionario	1.3092	13.5545	0.1282	1.1584	0.0643

En la Fig. 6 se muestra la gráfica con los resultados obtenidos experimentalmente, los resultados de la aproximación obtenidos mediante el análisis del cálculo clásico y los resultados obtenidos mediante la aproximación del análisis del cálculo fraccionario de orden $\gamma = 0.998$ que corresponden a la carga de un capacitor de 220uF en un circuito RC con una resistencia de $10k\Omega$ y un voltaje de carga de $V = 7.59v$. El orden γ se determinó empíricamente buscando una mejor aproximación respecto a los resultados experimentales.

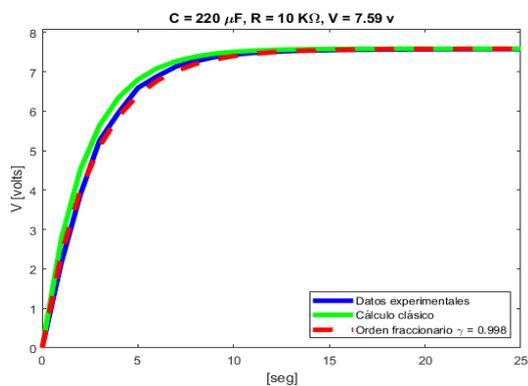


Fig. 6. Carga de un capacitor de 220uF

En la Tabla 5 se muestra el análisis por medio de los índices de desempeño IAE, ITAE, ISE, ITSE y RMSE para los resultados obtenidos de carga del capacitor de 220uF en donde se demuestra que la aproximación utilizando el análisis con el enfoque de cálculo fraccionario caracteriza mejor el comportamiento de carga del capacitor.

Tabla 5. Desempeño de carga de un capacitor de 220uF

	IAE	ITAE	ISE	ITSE	RMSE
Clásico	3.1973	17.6412	1.1987	3.7903	0.2147
Fraccionario	1.1315	7.5995	0.1486	0.6578	0.0756

En la Fig. 7 se muestra la gráfica con los resultados obtenidos experimentalmente, los resultados de la aproximación obtenidos mediante el análisis del cálculo clásico y los resultados obtenidos mediante la aproximación del análisis del cálculo fraccionario de orden $\gamma = 0.998$ que corresponden a la descarga de un capacitor de 220uF en un circuito RC con una resistencia de $10k\Omega$ y un voltaje inicial en el capacitor de $V_{C(0)} = 7.59v$. El orden γ se determinó empíricamente buscando una mejor aproximación respecto a los resultados experimentales.

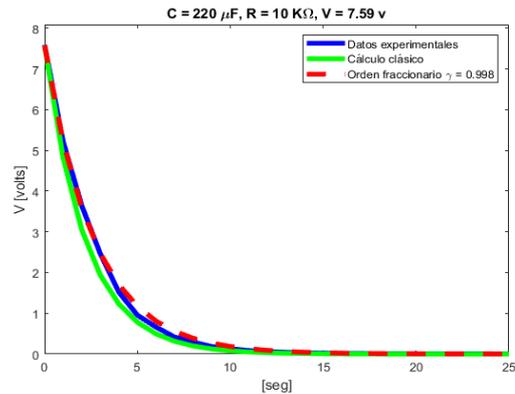


Fig. 7. Descarga de un capacitor de 220uF

En la Tabla 6 se muestra el análisis por medio de los índices de desempeño IAE, ITAE, ISE, ITSE y RMSE para los resultados obtenidos de descarga del capacitor de 220uF en donde se demuestra que la aproximación utilizando el análisis con el enfoque de cálculo fraccionario caracteriza mejor el comportamiento de descarga del capacitor.

Tabla 6. Desempeño de descarga de un capacitor de 220uF

	IAE	ITAE	ISE	ITSE	RMSE
Clásico	2.6643	13.1520	0.9591	3.0767	0.1921
Fraccionario	1.1316	8.3056	0.1490	0.9304	0.0757

B. Comportamiento experimental de un capacitor ante una señal de entrada cuadrada.

En la Fig. 8 se muestra la gráfica con los resultados obtenidos experimentalmente, los resultados de la aproximación obtenidos mediante el análisis del cálculo clásico y los resultados obtenidos mediante la aproximación del análisis del cálculo fraccionario de orden $\gamma = 0.995$ que corresponden a la respuesta que presenta un capacitor de 1000uF en un circuito RC con una resistencia de $10k\Omega$ y un voltaje de entrada mediante una señal cuadrada de amplitud 4.93v y una frecuencia de 0.5Hz. El orden γ se determinó empíricamente buscando una mejor aproximación respecto a los resultados experimentales.

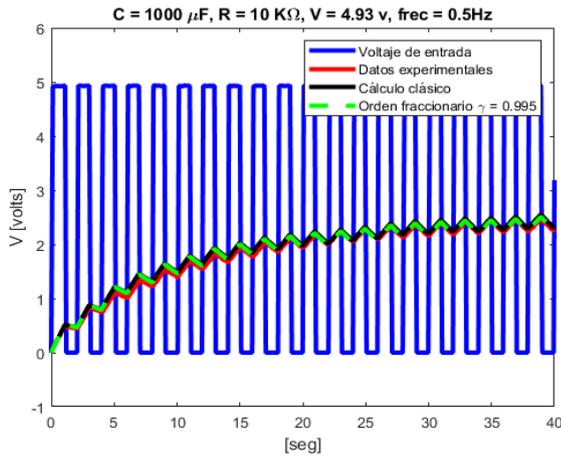


Fig. 8. Respuesta de un capacitor de 1000uF

En la Tabla 7 se muestra el análisis por medio de los índices de desempeño IAE, ITAE, ISE, ITSE y RMSE para los resultados obtenidos correspondientes a la dinámica del capacitor de 1000uF en donde se demuestra que la aproximación utilizando el análisis con el enfoque de cálculo fraccionario caracteriza mejor el comportamiento dinámico del capacitor.

Tabla 7. Desempeño de la respuesta de un capacitor de 1000uF

	IAE	ITAE	ISE	ITSE	RMSE
Clásico	0.0724	2.6138	49.5564	0.2100	3.5249
Fraccionario	0.0527	1.6075	23.0758	0.1115	1.2593

En la Fig. 9 se muestra la gráfica con los resultados obtenidos experimentalmente, los resultados de la aproximación obtenidos mediante el análisis del cálculo clásico y los resultados obtenidos mediante la aproximación del análisis del cálculo fraccionario de orden $\gamma = 0.997$ que corresponden a la respuesta que presenta un capacitor de 330uF en un circuito RC con una resistencia de 10kΩ y un voltaje de entrada mediante una señal cuadrada de amplitud 4.93v y una frecuencia de 0.5Hz. El orden γ se determinó empíricamente buscando una mejor aproximación respecto a los resultados experimentales.

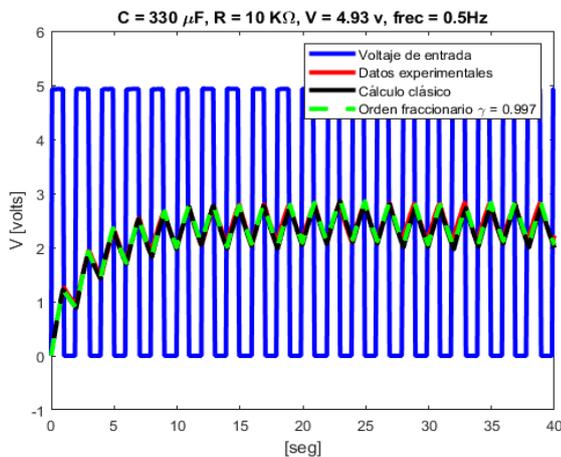


Fig. 9. Respuesta de un capacitor de 330uF

En la Tabla 8 se muestra el análisis por medio de los índices de desempeño IAE, ITAE, ISE, ITSE y RMSE para

los resultados obtenidos correspondientes a la dinámica del capacitor de 330uF en donde se demuestra que la aproximación utilizando el análisis con el enfoque de cálculo fraccionario caracteriza mejor el comportamiento dinámico del capacitor.

Tabla 8. Desempeño de la respuesta de un capacitor de 330uF

	IAE	ITAE	ISE	ITSE	RMSE
Clásico	0.0739	2.1930	51.9393	0.2157	5.9162
Fraccionario	0.0582	1.7666	42.0770	0.1344	3.6233

En la Fig. 10 se muestra la gráfica con los resultados obtenidos experimentalmente, los resultados obtenidos de la aproximación obtenidos mediante el análisis del cálculo clásico y los resultados obtenidos mediante la aproximación del análisis del cálculo fraccionario de orden $\gamma = 0.998$ que corresponden a la respuesta que presenta un capacitor de 220uF en un circuito RC con una resistencia de 10kΩ y un voltaje de entrada mediante una señal cuadrada de amplitud 4.93v y una frecuencia de 0.5Hz. El orden γ se determinó empíricamente buscando una mejor aproximación respecto a los resultados experimentales.

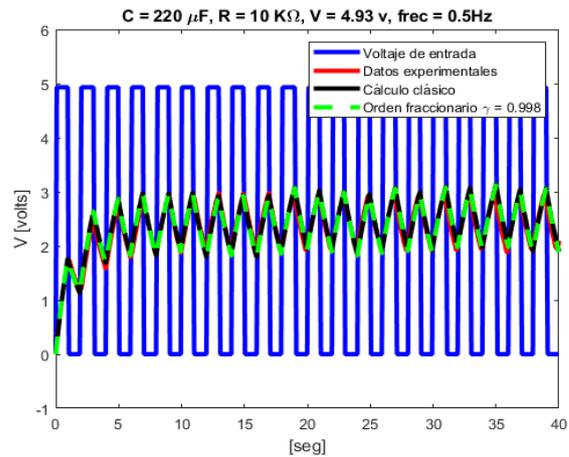


Fig. 10. Respuesta de un capacitor de 220uF

En la Tabla 9 se muestra el análisis por medio de los índices de desempeño IAE, ITAE, ISE, ITSE y RMSE para los resultados obtenidos correspondientes a la dinámica del capacitor de 220uF en donde se demuestra que la aproximación utilizando el análisis con el enfoque de cálculo fraccionario caracteriza mejor el comportamiento dinámico del capacitor.

Tabla 9. Desempeño de la respuesta de un capacitor de 220uF

	IAE	ITAE	ISE	ITSE	RMSE
Clásico	0.0724	2.6138	49.5564	0.2100	3.5249
Fraccionario	0.0527	1.6075	23.0758	0.1115	1.2593

V. CONCLUSIONES

El cálculo fraccionario es un área de las matemáticas que aún está en desarrollo teórico, por ende, en su mayoría la información que se encuentra en la literatura es teórica. El análisis mostrado de carga y descarga evidencia mediante los índices de desempeño IAE, ITAE, ISE, ITSE y RMSE que se obtiene una mejor caracterización matemática del

comportamiento dinámico del capacitor haciendo uso del cálculo fraccionario con respecto a la matemática clásica.

Si bien, existen experimentos que validan su utilidad en fenómenos físicos básicos como el mostrado en este trabajo mediante la carga y descarga en capacitores, así como, en fenómenos disipativos y en procesamiento de señales e imágenes, etc., aún no existen aplicaciones físicas basadas en el uso de cálculo fraccionario.

El trabajo de investigación actual en el contexto del cálculo fraccionario busca evidenciar ventajas o desventajas que pueda presentar dicho enfoque con respecto a la matemática clásica, los datos experimentales han validado su utilidad, sin embargo, llevar la teoría para aplicaciones de control de sistemas dinámicos aún muy lejos de poderse llevar a cabo debido a retos de costo computacional por resolver.

REFERENCIAS

- [1] C. D., «Past and present-fractional calculus: A mathematical tool from the past for present engineers,» *IEEE Industrial Electronics Magazine*, n° 2(1):3540, 2007.
- [2] F. Gómez Aguilar, «Aplicación del Cálculo Fraccionario al Modelado de Sistemas Biofísicos, Bioeléctricos y Mecánicos,» Tesis doctoral, División de Ciencias e Ingenierías Campus León, 2012.
- [3] R. A., A. N., A. F., K. H., M. Al-Qadi, M. Hasan y A. B., «A fractional LC-RC circuit,» *Fractional Calculus and Applied analysis*, vol. 9, n° 1, pp. 33-39, 2006.
- [4] L. Song, S. Xu y Y. J., «Dynamical models of happiness with fractional order,» *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, n° 3, pp. 616-628, 2010.
- [5] A. El-Misiery y E. Ahmed, «On a fractional model for earthquakes,» *Applied mathematics and computation*, vol. 178, n° 2, pp. 207-211, 2006.
- [6] S. E., G. R. y M. F., «Fractional calculus and continuous-time finance,» *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 284, n° 1, pp. 376-384, 2000.
- [7] B. D., S. I. Muslih, A. K. Golmankhaneh, A. K. Golmankhaneh y E. M. Rabei, «Fractional mechanics on the extended phase space,» *American Society of Mechanical Engineers*, pp. 1025-1030, 2009.
- [8] M. M. E. R., S. C. A. G., M. U. O. y V. J. J. M., «Aplicación del cálculo fraccionario en el modelado de la viscoelasticidad en polímeros,» *Ingenierías*, vol. 8, n° 28, pp. 47-55, 2005.
- [9] D. A. Benson, M. M. Meerschaert y J. Revielle, «Fractional calculus in hydrologic modeling: A numerical perspective,» *Advances in water resources*, vol. 51, pp. 479-497, 2013.
- [10] B. E. y I. A., «Electrostatics in fractal geometry: fractional calculus approach,» *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 44, n° 4, pp. 335-341, 2011.
- [11] I. Podlubny, *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, vol. 198, Academic press, 1998.
- [12] V. B. M. y M. C. A., «Introducción al control fraccionario,» *RIAI*, vol. 3, n° 3, pp. 5-23, 2006.
- [13] E. HÜSEYİN y e. al., «Investigation of electrical RC circuit within the framework of fractional calculus,» *Revista mexicana de física*, vol. 61, n° 1, pp. 58-63, 2015.
- [14] G.-A. J. F., C.-F. T., E.-M. J. E., C.-R. C. y E.-J. R. F., «Electrical circuits described by a fractional derivative with regular kernel,» *Revista mexicana de física*, vol. 62, n° 2, pp. 144-154, 2016.
- [15] G. J. F., A. A. y M. V. F., «Electrical circuits RC, LC, and RL described by Atangana–Baleanu fractional derivatives,» *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 45, n° 11, pp. 1514-1533, 2017.
- [16] G. D., R. P. K. y B. S., «Disturbance observer aided optimised fractional-order three-degree-of-freedom tilt-integral-derivative controller for load frequency control of power systems. IET Generation,» *Transmission & Distribution*, vol. 15, n° 4, pp. 716-736, 2021.
- [17] B. Dou y X. Yue, «Disturbance observer-based fractional-order sliding mode control for free-floating space manipulator with disturbance,» *Aerospace Science and Technology*, vol. 132, 2023.
- [18] A. H., Y. A., A. A., A. N. D. y J. H., «Stabilization of Nonlinear Vibration of a Fractional-Order Arch MEMS Resonator Using a New Disturbance-Observer-Based Finite-Time Sliding Mode Control,» *Mathematics*, vol. 11, n° 4, 2023.
- [19] D. Y., S. S., S. X. y T. I., «Observer-Based Adaptive Fuzzy Quantized Control for Fractional-Order Nonlinear Time-Delay Systems with Unknown Control Gains,» *Mathematics*, vol. 12, n° 2, 2024.
- [20] S. Wang, G. H., L. Y., L. X. y C. Y., «A Fractional-Order ADRC Architecture for a PMSM Position Servo System with Improved Disturbance Rejection,» *Fractal and Fractional*, vol. 8, n° 1, 2024.
- [21] I. Petras, *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*, Springer Science & Business Media, 2011.
- [22] R. y. M. F. Gorenko, *Fractional calculus*, Springer, 1997.
- [23] P. y. A. R. Humbert, *Sur la fonction de Mittag-Leffler et quelques-unes de ses généralisations*, vol. 77(2):180-185, Bull. Sci. Math, 1953.