

Aplicación de un controlador PR con compensación no lineal en un péndulo simple

Manuel Alejandro Ojeda-Misses^a, Virgilio López-Morales^b, Anilú Franco-Árcega^c

Área Académica de Computación y Electrónica, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5, Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.

^amanuel_ojeda@uaeh.edu.mx, ^bvirgilio@uaeh.edu.mx, ^cafranco@uaeh.edu.mx

Resumen—En este trabajo se presenta una metodología para resolver el problema de control de regulación y seguimiento de trayectoria de un péndulo simple mediante el uso de un controlador Proporcional Retardado (PR) con compensación no lineal. La principal ventaja de la propuesta es evitar la necesidad de mediciones de velocidad o su estimación, que se usa comúnmente en la mayoría de los esquemas de control, como los controladores proporcionales de tipo derivativo o el control de par. El diseño del controlador se aborda mediante un análisis frecuencial usando el criterio de σ -estabilidad y se pone a prueba mediante el modelo de un péndulo simple con un grado de libertad. Los resultados son analizados y son presentadas las gráficas de respuestas de las simulaciones realizadas.

Palabras clave— péndulo simple, controlador basado en retardo, no lineal, frecuencia, seguimiento de trayectoria.

I. INTRODUCCIÓN

Los problemas de regulación y control de seguimiento para los robots manipuladores flexibles y rígidos han sido presentados en la literatura, donde la mayoría de esas propuestas utilizan como controladores la retroalimentación basados en el controlador Proporcional Derivativo (PD) o el algoritmo de par calculado, considerando que la información de los estados está disponible, [1-9]. Un caso particular, es el péndulo simple que puede verse como un robot rígido de un grado de libertad donde se tienen términos no lineales, sin embargo, en la práctica pueden aplicarse métodos de linealización.

Por otro lado, se tienen detalles para implementar un controlador PD, principalmente porque la señal de velocidad puede no estar disponible para medición y por lo tanto debe determinarse mediante una diferenciación numérica de primer orden o algún otro enfoque. Debido al interés de evitar el uso de medidas de velocidad, se han desarrollado diferentes alternativas de controladores [10], [11] y [12] que, en general, siguen un procedimiento de diseño: en algunos casos se busca la construcción de un observador para la señal de velocidad empleando las entradas y salidas disponibles; por otro lado, se busca diseñar un controlador de retroalimentación de estado donde la velocidad se reemplaza por la reconstruida a partir del observador.

Los sistemas con retardo están presentes en diversos tipos de sistemas donde los efectos temporales han sido un área activa de la investigación científica en una amplia gama de sistemas biológicos, ecológicos, de ingeniería, entre otros [14], [15], [16]. El análisis de esta clase de sistemas ha arrojado una importante cantidad de aportes teóricos en el área del análisis de estabilidad. En sistemas dinámicos controlados, pueden surgir retrasos debido a efectos de comunicación o fenómenos naturales [17], [18], cuyos efectos dinámicos no pueden despreciarse. Por un lado, la presencia de retardos en el tiempo puede provocar un rendimiento deficiente o, en algunos casos, inestabilidad.

Por otro lado, en la literatura se ha comprobado que la introducción de retardos de tiempo para las propuestas de control puede mejorar el rendimiento del sistema o incluso estabilizarlo [18]. Este enfoque se ha utilizado con éxito para resolver el problema de estabilizar sistemas caóticos y oscilatorios de segundo orden [19]. El efecto estabilizador de los retardos en la retroalimentación se ha estudiado en profundidad utilizando la σ -estabilidad [20], [21], [22] para desigualdades de matrices lineales (LMI) [23]. Entre los controladores más comunes está el controlador Proporcional Retardado (PR) con un enfoque introducido recientemente [20-23] con grandes alternativas a las leyes clásicas de control Proporcional Derivado. Este esquema evita el uso de observadores de estado o diferenciación numérica, lo que también mejora la respuesta del sistema frente a mediciones ruidosas. Sin embargo, tiene una desventaja, las ganancias del controlador deben ser estimadas de forma precisa y el margen de estabilidad en muchos casos es acotado.

Para lograr lo anterior, se ha estudiado detalladamente el análisis en el dominio de la frecuencia de la σ -estabilidad para sistemas lineales de segundo orden [22], [23]. Como principal resultado de este estudio, se desarrolló una metodología de ajuste de controladores PR mediante resultados experimentales utilizando una ley de control PR resolviendo el problema de posición de seguimiento de trayectoria de un sistema lineal de segundo orden, el rendimiento del controlador PR ha mostrado ventajas con respecto a un controlador Proporcional Derivado (PD), por ejemplo, teniendo ventajas en la implementación en

un proceso en tiempo real y reducción del ruido de la señal de control.

Algunas aplicaciones del control PR tratan con sistemas lineales o aproximadamente linealizados que trabajan principalmente en una zona de equilibrio [24]. En otras aplicaciones, como el control de robots en tareas de seguimiento de trayectorias, las condiciones de operación exigen una zona de operación más grande de los controladores, y se ha demostrado que los controladores PR pueden estabilizar sistemas robóticos comparados con los PD [25]. En este caso, se está motivando el uso de controladores PR como una alternativa para el control de un péndulo simple compensando la gravedad con termino no lineal.

El objetivo es presentar y diseñar un controlador que permita para resolver el problema de control de regulación y de seguimiento de trayectoria de un péndulo simple mediante el uso de un controlador PR. Las ventajas de la propuesta de solución son la evasión de mediciones de velocidad o su estimación y simplificar la compensación no lineal que incluye el termino de gravedad.

El controlador es diseñado mediante el criterio de σ -estabilidad. El controlador propuesto se pone a prueba mediante la regulación y el seguimiento de trayectoria para un péndulo simple. Este trabajo contiene en el apartado II el diseño del controlador proporcional retardado mediante una compensación no lineal y gravedad. En la sección III se presenta la simulación del controlador mediante la regulación y el seguimiento de trayectoria con los parámetros estimados de la sección II. Finalmente, se discuten los resultados y se presentan las conclusiones del trabajo obtenido.

II. DISEÑO DEL CONTROLADOR PROPORCIONAL RETARDADO (PR) CON COMPENSACIÓN NO LINEAL

El objetivo de control es implementar un controlador PR que permita compensar la no linealidad y la gravedad del modelo del comportamiento dinámico de un péndulo, determinando a partir del modelo matemático del diagrama esquemático del péndulo simple (ver Figura 1).

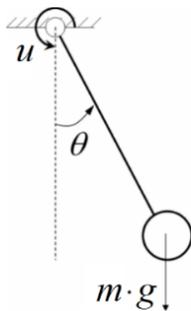


Fig. 1. Diagrama esquemático del péndulo simple.

El modelo del péndulo está compuesto por una bola de masa m situada en el extremo de una barra con masa despreciable de longitud l , el momento de inercia del péndulo respecto al punto de giro es J , el coeficiente de fricción es dado por B , la

entrada de control es $u(t)$ y la variable de salida es el posición angular $\theta(t)$.

De la figura 1 se puede observar que el modelo del péndulo simple está en función del ángulo θ , determinado por la ecuación (1):

$$\ddot{\theta}(t) + a\dot{\theta}(t) + b\sin\theta(t) = u(t). \quad (1)$$

donde $a = B/J$ y $b = mgl/J$.

La estrategia de control $u(t)$ propuesta está basada en el controlador PR [21], [25] más una compensación que ayudará a minimizar el efecto de la gravedad y el término no lineal dado por la función $\sin\theta(t)$, dada como:

$$u(t) = -K_p\theta(t) + K_r\theta(t-h) + b\sin\theta(t) \quad (2)$$

donde K_p es la ganancia proporcional, K_r es la ganancia retardada y h es el retardo (ver figura 2).

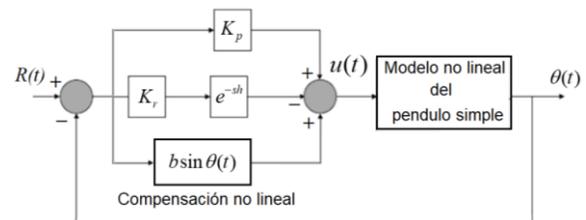


Fig. 2. Diagrama de control del PR con compensación no lineal aplicado al péndulo simple.

La sintonización de ganancias del controlador PR no es una tarea fácil, considerando que tener al introducir un retardo de tiempo en el controlador causará un número infinito de polos en lazo cerrado. Así, sustituyendo la ley de control de PR con compensación no lineal (2) en (1) se obtiene el siguiente cuasipolinomio característico en lazo cerrado:

$$p(s) = s^2 + as + K_p + K_r e^{-sh} = 0 \quad (3)$$

Es decir, el sistema (1) y (2) es exponencialmente estable si todas las raíces del cuasipolinomio (3) están ubicados en la región izquierda del plano complejo. Ahora es introducido el concepto de σ -estabilidad.

Definición 1 [26]. Se supone que existe $\sigma^* = \max[\Re(\lambda) : p(\lambda) = 0]$ y $y(t, \varphi)$ es la solución del sistema (1) y (2) para la condición inicial $\varphi(\theta)$. Así entonces, para cualquier $\sigma > \sigma^*$, existe una constante $\gamma = \gamma(\sigma)$ tal que:

$$\|y(t, \varphi)\| \leq \gamma e^{\sigma t} \|\varphi\|_h, \quad t \geq 0 \quad (4)$$

En particular, si $\sigma^* < 0$ entonces se selecciona $\sigma^* < \sigma < 0$ tal que brinde una solución exponencialmente estable. Ahora, el problema a considerar es determinar el máximo valor que σ puede tomar; corresponde a la cota de decaimiento máximo

exponencial para el sistema en lazo cerrado. El método empleado es mediante σ - estabilidad de $p(s)$, es decir, es necesario realizar el cambio de variable $s \rightarrow s - \sigma$ y analizar la estabilidad del cuasipolinomio.

$$p(s - \sigma) = (s - \sigma)^2 + a(s - \sigma) + K_p + K_r e^{-(s - \sigma)h} = 0 \quad (5)$$

Por lo que, como paso preliminar para la caracterización de la cota de decaimiento máximo alcanzable para el sistema en lazo cerrado es el método de D-particiones [27], que permite dividir el espacio de parámetros en dos regiones disjuntas separadas por hipersuperficies llamadas límites de cruce de estabilidad. Estos límites permiten ver si una raíz de $p(s - \sigma)$ tocan el eje imaginario del plano complejo [28]. Por lo tanto, se buscan los puntos de cruce para (h, K_r) de manera que:

$$p(s - \sigma) = 0. \quad (6)$$

El dominio de estabilidad del sistema en lazo cerrado está limitado por la hipersuperficie

$$K_r(h) = \frac{\sigma^2 - a\sigma + K_p}{e^{h\sigma}} \quad (7)$$

y por las ecuaciones paramétricas

$$h(\omega) = \frac{1}{\omega} \operatorname{arc cot} \left(\frac{\sigma^2 - a\sigma + K_p - \omega^2}{2\omega(\sigma - a/2)} \right) + \frac{n\pi}{\omega} \quad (8)$$

$$K_r(\omega) = \frac{2\sigma\omega - a\omega}{e^{h(\omega)\sigma} (\sin(h(\omega)\omega))} \quad (9)$$

donde $\omega \in \mathbb{R}^+$ y $n = 1, 2, 3, \dots$. Los límites de cruce de estabilidad generados cuando una raíz de $p(s - \sigma)$ está en el origen del plano complejo se obtienen estableciendo $s = 0$ en (5), por lo tanto

$$p(0) = \sigma^2 - a\sigma + K_p + K_r e^{h\sigma} = 0 \quad (10)$$

Resolviendo para $K_r(h)$ se obtiene la ecuación (7). Por otro lado, la estabilidad cruzando los límites generados cuando una raíz de $p(s - \sigma)$ está ubicada en el eje imaginario se obtienen estableciendo $s = i\omega$ en (5), por lo tanto

$$p(i\omega) = -\omega^2 - 2\sigma\omega i + \sigma^2 + a\omega i - a\sigma + K_p - K_r e^{h\sigma} \cos(h\omega) + K_r e^{h\sigma} i \sin(h\omega) = 0 \quad (11)$$

Lo anterior es cierto cuando las partes real e imaginaria de $p(s - \sigma) = p(i\omega - \sigma)$ son simultáneamente cero, es decir

$$\operatorname{Re}(p) = -\omega^2 + \sigma^2 - a\sigma + K_p - K_r e^{h\sigma} \cos(h\omega) = 0 \quad (12)$$

$$\operatorname{Im}(p) = -2\sigma\omega + a\omega + K_r e^{h\sigma} \sin(h\omega) = 0 \quad (13)$$

Así, las ecuaciones (13) y (14) permiten obtener

$$\cot(h\omega \pm n\pi) = \frac{\sigma^2 + K_p - a\sigma - \omega^2}{2\sigma\omega - a\omega} \quad (14)$$

Y las ecuaciones paramétricas (8) y (9) son obtenidas algebraicamente mediante la manipulación de (12) y (13).

La Figura 3 muestra el espacio de parámetros mediante las hipersuperficies encontradas. Los límites son obtenidos mediante realizando una iteración de h en (7) y ω en (8) y (9) usando $a = 1$, $K_p = 10$ and $\sigma \in [0, 4.2787]$. La Figura 3 muestra dos zonas que pueden ser distinguidas, la primera zona corresponder a valores con retardos bajos, que corresponden a los cruces de frontera para $s = 0$ y $s = i\omega$ interceptados cada uno con una región cerrada llamada región principal de estabilidad. La segunda zona está formada por los límites de cruce obtenidas de las ecuaciones paramétricas para $s = i\omega$, esta zona está compuesta por regiones cerradas llamadas regiones de estabilidad periódica.

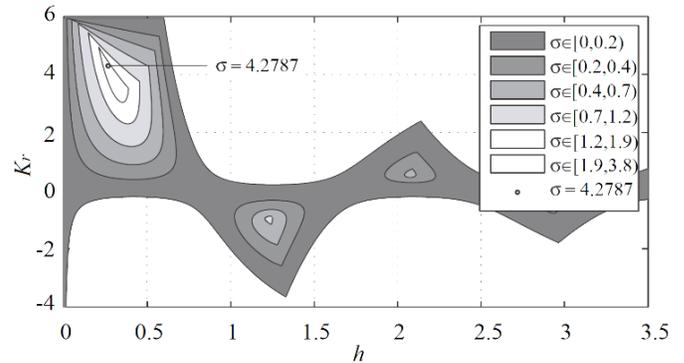


Fig. 3. Espacio de parámetros de las hipersuperficies para el controlador PR aplicado al modelo del péndulo simple.

Ambas regiones colapsan en diferentes puntos dentro del espacio de parámetros para diferentes valores del par (h, K_r) . Cada punto de colapso ocurre para un σ específico. Además, a medida que h aumenta, se necesita un valor menor de σ para inducir el colapso de una región.

Por el contrario, si σ aumenta, entonces se necesita un valor bajo de h para inducir un colapso. Al inspeccionar ambas regiones, se encuentra que el colapso de la región de estabilidad principal se caracteriza por una raíz dominante real triple en $-\sigma$ en el plano complejo cuando $\sigma = 4.2787$ y se tiene un retardo $h = 0.3199$ y una ganancia retardada $K_r = 6.0117$.

Por otro lado, los colapsos de la región de estabilidad periódica se caracterizan por una triple raíz dominante imaginaria con parte real igual a $-\sigma$. De la definición 1 se deduce que cada punto de colapso corresponde a la cota de decaimiento máxima obtenida en cada región. Comúnmente, un valor bajo de h requiere un valor mayor de σ para que una región colapse, lo que implica que la tasa de caída exponencial máxima global ocurre cuando el retraso es pequeño, es decir, dentro de la región principal de estabilidad.

Dada la ganancia proporcional $K_p > \frac{-3}{4}a^2$. Entonces, entonces una triple raíz dominante para el sistema en lazo cerrado (1) y (2) en $-\sigma^*$ se logra cuando:

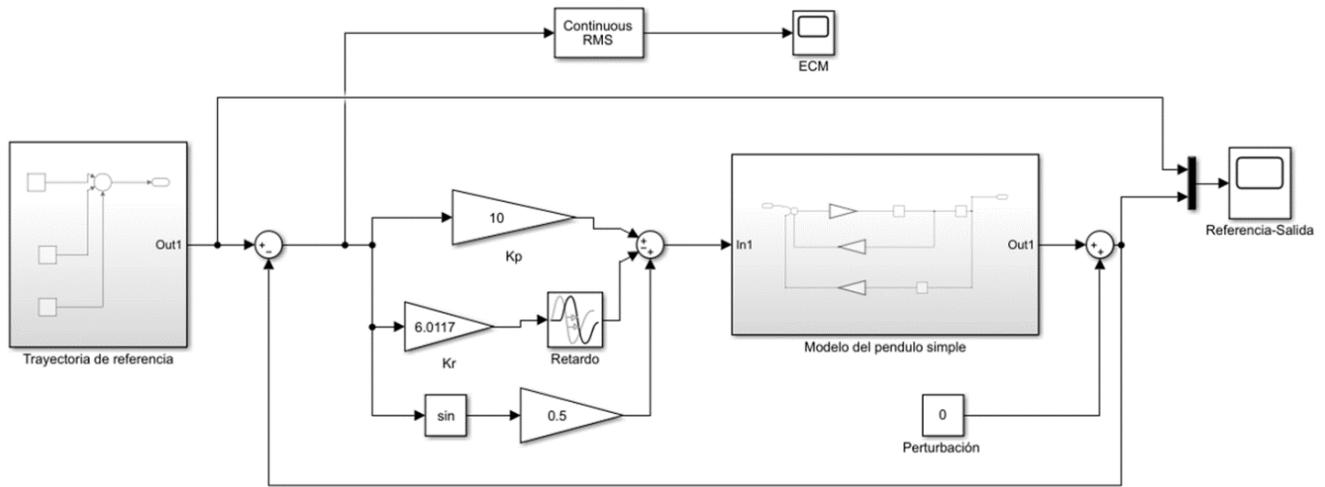


Figure 4. Diagrama de bloques del controlador PR con compensación no lineal para el modelo del péndulo simple.

$$\sigma^* = \frac{a + \sqrt{3a^2 + 4K_p}}{2} \quad (15)$$

En suma, la ganancia K_r y el retardo h que σ -estabilizan al sistema (1) y (2) con decaimiento exponencial σ^* :

$$h^* = \frac{\sqrt{3a^2 + 4K_p}}{\frac{a^2}{2} + 2K_p} \quad (16)$$

$$K_r^* = \frac{2\sigma a}{h^* e^{h^* \sigma^*}} \quad (17)$$

Analíticamente, los parámetros (h, K_r) , que determinan la cota de decaimiento máximo, son calculados mediante $p(s - \sigma)|_{s=0} = 0$, $\frac{\partial p(s - \sigma)}{\partial s}|_{s=0} = 0$ y $\frac{\partial^2 p(s - \sigma)}{\partial s^2}|_{s=0} = 0$:

$$p(s - \sigma)|_{s=0} = \sigma^2 - a\sigma + K_p - K_r e^{h\sigma} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial p(s - \sigma)}{\partial s}|_{s=0} = -2\sigma + a + hK_r e^{h\sigma} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 p(s - \sigma)}{\partial s^2}|_{s=0} = 2 - h^2 K_r e^{h\sigma} = 0 \quad (20)$$

De las ecuaciones (18) y (19) se tiene:

$$h = \frac{2\sigma - a}{\sigma^2 - a\sigma + K_p} \quad (21)$$

Las ecuaciones (18) y (20) implican

$$h^2 = \frac{2}{\sigma^2 - a\sigma + K_p} \quad (22)$$

Por otro lado, sustituyendo la ecuación (21) en (22) se tiene:

$$(2\sigma - a)^2 = 2(\sigma^2 - a\sigma + K_p) \quad (23)$$

De la ecuación (23) es obtenida la ecuación (15). Ahora, para obtener la ecuación (16) se sustituye la ecuación (15) en la ecuación (21), finalmente, para obtener la ecuación (17) se obtiene de la ecuación 19.

La estrategia de control presentada asegura la estabilidad del sistema en lazo cerrado. En vista de la continuidad de la ubicación de las raíces con respecto a los parámetros [23], el margen de estabilidad obtenido σ^* permite variaciones de los parámetros, incluidas las perturbaciones externas y las incertidumbres debido a los retardos en el sistema debido al muestreo [29].

III. RESULTADOS EXPERIMENTALES DEL CONTROL PR CON COMPENSACIÓN NO LINEAL

En esta sección se presentan los resultados experimentales para el control PR con compensación no lineal para el péndulo simple mediante la regulación y el seguimiento de trayectorias con parámetros $a=1$, $b=0.5$, $K_p=10$, $h=0.3199$ y $K_r=6.0117$.

La simulación numérica es llevada a cabo usando el método de integración de Runge Kutta con un periodo de integración de 0.01 segundos. La señal de referencia para regulación que conmuta entre 0 y π radianes, $R(t)=[0, \pi]$ rad y la señal de referencia para seguimiento de trayectorias es dada mediante una suma de senoidales $R(t) = 2.5\sin(0.1t) + 20\sin(0.1t) + 20\sin(0.01t)$ rad.

Por otro lado, es estimado el error cuadrático medio (ECM) que permite medir el promedio de los errores al cuadrado, es decir, la diferencia entre la señal de referencia y la señal de salida del sistema.

En la Figura 5 se muestra la respuesta del péndulo para el problema de regulación. En este caso, se emplea una señal pulso con una frecuencia de 50 segundos, la cual lleva a cabo la regulación del péndulo de la posición inicial de 0 a π , o 180° grados.

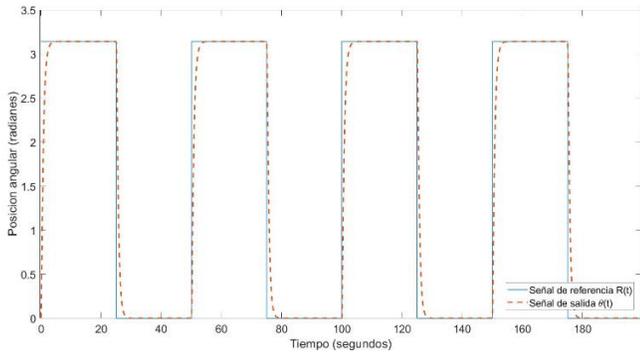


Fig. 5. Señal de posición del péndulo simple para el problema de regulación usando el controlador PR con compensación no lineal.

Por otro lado, en la Figura 6 se presenta la señal de error para el problema de regulación de posición del péndulo, dicha señal es medida o presentada en radianes.

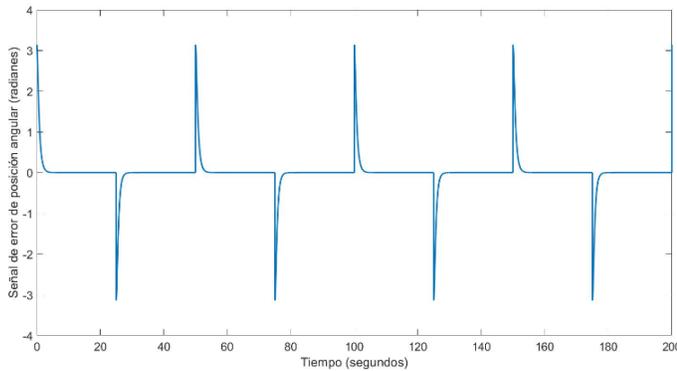


Fig. 6. Señal de error de posición del péndulo simple para el problema de regulación usando el controlador PR con compensación no lineal.

Por su parte la Figura 7 presenta la respuesta del péndulo simple con la estrategia de control PR diseñada, en este caso son presentadas la señal de la trayectoria de referencia y la señal de la trayectoria de salida. Donde puede observarse que el controlador propuesto es capaz de llevar a cabo el seguimiento de trayectoria para el péndulo presentado.

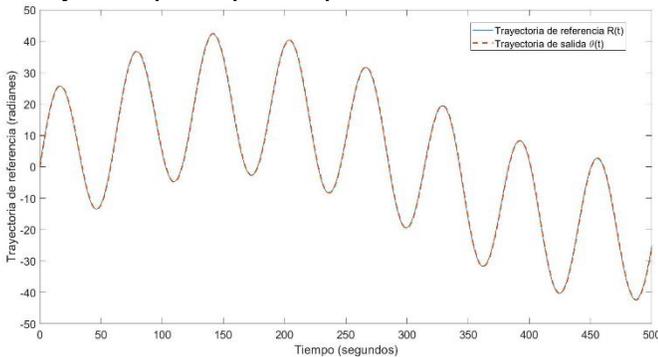


Fig. 7. Señal de seguimiento de trayectoria para el péndulo simple usando el controlador PR con compensación no lineal.

Por otro lado, es presentada la señal del error cuadrático medio (ECM) que permite evaluar la precisión y el rendimiento del sistema en lazo cerrado en relación con los resultados

obtenidos. Específicamente, el ECM mide la media de los cuadrados de los errores, donde cada error es la diferencia entre el valor predicho o estimado y el valor real u observado. El ECM es estimado con base en:

$$ECM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_i - \theta_i)^2 \quad (23)$$

donde n es el número de muestras, R_i es el valor de la referencia y θ_i es el valor de la salida para cada muestra, respectivamente.

El ECM permite cuantificar el rendimiento de un controlador al minimizar las desviaciones de la salida del sistema respecto a una referencia deseada. En este caso, el valor de ECM es bajo y tiende a cero (ver Figura 8), por lo que, indica un buen desempeño en el seguimiento de trayectoria del péndulo con base en las simulaciones presentadas.

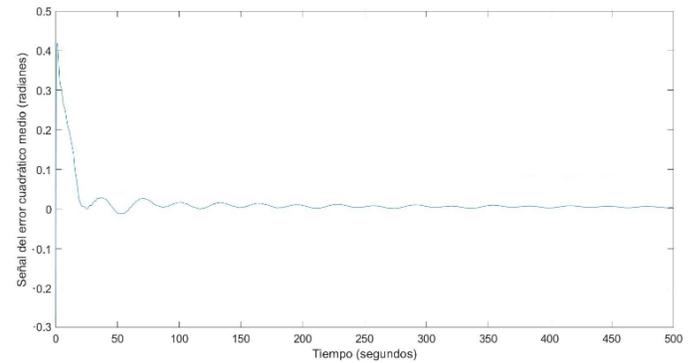


Fig. 8. Señal del error cuadrático medio del seguimiento de trayectoria usando el controlador PR con compensación no lineal.

Como prueba final, el seguimiento de trayectorias para el péndulo simple usando la técnica de control PR propuesta es puesta a prueba ante perturbaciones mediante una señal pulso con magnitud de 50 y una periodo de tiempo de 100 segundos. Ante esto, es obtenida la salida del sistema en lazo cerrado, donde puede observarse que la propuesta presentada es robusta ante perturbaciones [29], donde a pesar de ellas, el seguimiento de trayectoria es llevado a cabo sin ningún contratiempo, tal como se muestra en la Figura 9.

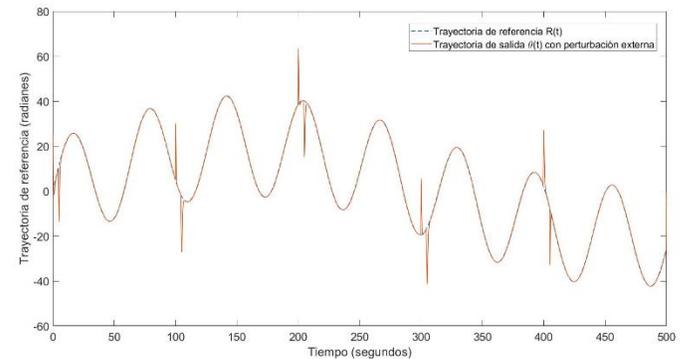


Fig. 9. Señal de seguimiento de trayectoria para el péndulo simple usando el controlador PR con compensación no lineal con perturbaciones.

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado el uso de un controlador Proporcional Retardado más compensación no lineal con gravedad para evitar las desventajas que presenta la estimación de velocidad, como en el control Proporcional Derivado. De hecho, a pesar de su estructura básica, se ha demostrado (mediante resultados numéricos) que el controlador PR es capaz de controlar la dinámica del péndulo simple, incluso cuando son adicionadas perturbaciones externas.

Los resultados numéricos muestran que el controlador PR tiene un buen desempeño para las tareas de trayectoria y regulación (en el sentido de la magnitud del error de seguimiento, y validado mediante una comparación del análisis del error cuadrático medio). Por lo que, el controlador PR brinda una alternativa para el control de sistemas no lineales, además de una fácil implementación (mediante el análisis de frecuencia) y su adecuado desempeño en tareas de seguimiento de trayectorias sin el uso de etapas de filtrado de señales.

Cabe mencionarse que los resultados obtenidos buscan una alternativa en la propuesta de controladores PD, además, permiten demostrar la robustez con base en su respuesta, lo cual abre la puerta al diseño de otros controladores y a la búsqueda de mejores alternativas de control mediante métodos basados en el lugar de las raíces, así como técnicas de control basadas en robustez, optimización, entre otros. Como trabajo futuro, se está desarrollando e implementando una plataforma basada en un servomecanismo, de manera que pueda ser adaptada y reprogramada para realizar otro tipo de controladores e incluso métodos de identificación de parámetros.

REFERENCIAS

- [1] B. Paden and R. Panja, "Globally asymptotically stable 'PD+' controller for robot manipulators," *Int. J. Control*, vol. 47, no. 6, pp. 1697–1712, 1988.
- [2] M. W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, vol. 3. New York, NY, USA: Wiley, 2006.
- [3] A. Zavala-Río, E. Aguiñaga-Ruiz, and V. Santibáñez, "Global trajectory tracking through output feedback for robot manipulators with bounded inputs," *Asian J. Control*, vol. 13, no. 3, pp. 430–438, 2011.
- [4] J. Bowkett and R. Mukherjee, "Comparison of control methods for twolink planar flexible manipulator," in *Proc. Int. Des. Eng. Tech. Conf. Comput. Inf. Eng. Conf.* New York, NY, USA: ASME, 2017, pp. 1–10.
- [5] Y. Si, J. Pu, and L. Sun, "A fast terminal sliding mode control of twolink flexible manipulators for trajectory tracking," in *Proc. Chin. Automat. Congr. (CAC)*, 2017, pp. 6387–6391.
- [6] J. Z. Szaśiadek, S. Ulrich, and A. Krzyżak, "Trajectory tracking and nonparametric identification of flexible space robot manipulators," in *Proc. 23rd Int. Conf. Methods Models Automat. Robot. (MMAR)*, Aug. 2018, pp. 83–88.
- [7] Z.-C. Qiu, C. Li, and X.-M. Zhang, "Experimental study on active vibration control for a kind of two-link flexible manipulator," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 118, pp. 623–644, Mar. 2019.
- [8] K. Lochan, J. P. Singh, B. K. Roy, and B. Subudhi, "Hidden chaotic path planning and control of a two-link flexible robot manipulator," in *Nonlinear Dynamical Systems with Self-Excited and Hidden Attractors*. Cham, Switzerland: Springer, 2018, pp. 433–463.
- [9] S. T. Wu, S.-Q. Tang, and K.-P. Huang, "Vibration attenuation of a twolink flexible arm carried by a translational stage," *J. Vib. Control*, vol. 24, no. 23, pp. 1–15, 2018.
- [10] H. Berghuis and H. Nijmeijer, "Robust control of robots using only position measurements," *IFAC Proc. Vol.*, vol. 26, no. 2, pp. 329–334, 1993.
- [11] C. C. De Wit and N. Fixot, "Robot control via robust estimated state feedback," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 36, no. 12, pp. 1497–1501
- [12] R. Kelly, "A simple set-point robot controller by using only position measurements," *IFAC Proc. Vol.*, vol. 26, no. 2, pp. 527–530, 1993.
- [13] R. M. May, "Time-delay versus stability in population models with two and three trophic levels," *Ecology*, vol. 54, no. 2, pp. 315–325, 1973.
- [14] V. L. Kharitonov and A. P. Zhabko, "Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems," *Automatica*, vol. 39, no. 1, pp. 15–20, 2003.
- [15] K. Gu, K. L. Vladimir, and J. Chen, *Stability of Time-Delay Systems*. Berlin, Germany: Springer, 2003.
- [16] E. Fridman, *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*. Basel, Germany: Birkhäuser, 2014.
- [17] S. I. Niculescu, *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*, vol. 269. New York, NY, USA: Springer, 2001.
- [18] C. Abdallah, P. Dorato, J. Benites-Read, and R. Byrne, "Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems," in *Proc. Amer. Control Conf.*, Jun. 1993, pp. 3106–3107.
- [19] C. Abdallah, P. Dorato, J. Benites-Read, and R. Byrne, "Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems," in *Proc. Amer. Control Conf.*, Jun. 1993, pp. 3106–3107.
- [20] R. Villafuerte and S. Mondié, "Tuning the leading roots of a second order DC servomotor with proportional retarded control," *IFAC Proc. Vol.*, vol. 43, no. 2, pp. 337–342, 2010.
- [21] S. Mondie, R. Villafuerte, and R. Garrido, "Tuning and noise attenuation of a second order system using proportional retarded control," *IFAC Proc. Vol.*, vol. 44, no. 1, pp. 10337–10342, 2011.
- [22] R. Villafuerte, S. Mondié, and R. Garrido, "Tuning of proportional retarded controllers: Theory and experiments," *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 21, no. 3, pp. 983–990, May 2013.
- [23] T. Ortega-Montiel, R. Villafuerte-Segura, C. Vázquez-Aguilera, and L. Freidovich, "Proportional retarded controller to stabilize underactuated systems with measurement delays: Furuta pendulum case study," *Math. Problems Eng.*, vol. 2017, Dec. 2017, Art. no. 2505086
- [24] T. Ortega-Montiel, R. Villafuerte-Segura, C. Vázquez-Aguilera, and L. Freidovich, "Proportional retarded controller to stabilize underactuated systems with measurement delays: Furuta pendulum case study," *Math. Problems Eng.*, vol. 2017, Dec. 2017, Art. no. 2505086.
- [25] M. Ramírez-Neria, G. Ochoa-Ortega, A. Luviano-Juárez, N. Lozada-Castillo, M. A. Trujano-Cabrera and J. P. Campos-López, "Proportional Retarded Control of Robot Manipulators," in *IEEE Access*, vol. 7, pp. 13989–13998, 2019, doi: 10.1109/ACCESS.2019.2892414.
- [26] Hale, J. K., Sjoerd M., Verduyn, L. *Introduction to functional differential equations*, 1st ed. NewYork: Springer-Verlag, 1993.
- [27] Neimark, J. D- subdivisions and spaces of quasipolynomials. *Prikl. Mat. Mekh.* 1949, 13(5):349–80.
- [28] Michiels W, Niculescu S. I. *Stability and stabilization of time-delay systems: an eigenvalue-based approach*. 1sted. Philadelphia: SIAM, 2007.
- [29] R. A. Zaldivar-López, M Ojeda-Misses, "Controlador Proporcional Integral Posicast Robusto para una clase de sistema lineal invariante en el tiempo de segundo orden", *Ingeniería Investigación y Tecnología (México)*, 04, 1-10, 010,2023.
<https://doi.org/10.22201/ii.25940732e.2023.24.4.027>