

Superposición de Imágenes a Través de una Memoria Asociativa y Recuperación de Imagen Mediante Sustracción Óptima.

Irving Luna-Ortiz
Laboratorio de Diseño Mecatrónico
Óptimo (LDMO)
Centro de Innovación y Desarrollo
Tecnológico en Cómputo (CIDETEC),
Instituto Politécnico Nacional (IPN)
Ciudad de México, México
ilunao1900@alumno.ipn.mx

Mario Aldape-Pérez
Grupo Alfa-Beta
CIDETEC, Instituto Politécnico Nacional
(IPN)
Ciudad de México, México
maldape@ipn.mx

Miguel Gabriel Villarreal-Cervantes
Laboratorio de Diseño Mecatrónico
Óptimo (LDMO)
Centro de Innovación y Desarrollo
Tecnológico en Cómputo (CIDETEC),
Instituto Politécnico Nacional (IPN)
Ciudad de México, México
mvillarrealc@ipn.mx

Alam Gabriel Rojas-López
Laboratorio de Diseño Mecatrónico
Óptimo (LDMO)
Centro de Innovación y Desarrollo
Tecnológico en Cómputo (CIDETEC),
Instituto Politécnico Nacional (IPN)
Ciudad de México, México
arojasl2101@alumno.ipn.mx

Jesús Aldo Paredes-Ballesteros
Laboratorio de Diseño Mecatrónico
Óptimo (LDMO)
Centro de Innovación y Desarrollo
Tecnológico en Cómputo (CIDETEC),
Instituto Politécnico Nacional (IPN)
Ciudad de México, México
jparedesb1900@alumno.ipn.mx

Arturo Ocampo-Alvarez
Grupo de Robótica Evolutiva
Experimental (REEX)
FES Aragón, UNAM
Ciudad de México, México
arturoocampo76@aragon.unam.mx

Resumen—En el presente trabajo se pretende realizar un estudio para dar solución a problemas de superposición de imágenes, ya que existen tratamientos en los cuales, a propósito o accidentalmente, las imágenes presentan superposición, dificultando sustraer la imagen deseada. Se busca crear una superposición de imágenes basada en una memoria asociativa, "*Linear Associator*", fusionando los píxeles mediante la asociación de imágenes, y una vez generada la imagen resultante, sustraer la imagen deseada mediante un algoritmo de optimización.

Palabras clave: Superposición de imágenes, memorias asociativas, sustracción de imágenes, algoritmo de optimización.

I. INTRODUCCIÓN

La importancia de tener técnicas que permitan recuperar imágenes de problemas con imágenes superpuestas, es de gran utilidad en campos como el procesamiento digital de señales y en visión artificial, por tal motivo es conveniente tanto el generar problemáticas complejas a la hora de superponer imágenes, como la de proponer casos específicos de soluciones de estos problemas, es por esto que este trabajo propone la generación de una nueva técnica de superposición de imágenes mediante una memoria asociativa y la sustracción de una imagen de la resultante de la mezcla de varias imágenes mediante un algoritmo de optimización.

La superposición está definida como el fenómeno que resulta cuando dos o más elementos, como

imágenes, funciones o señales, se combinan o suman en el mismo espacio-tiempo, dando lugar a una mezcla. En 1926 Erwin Schrödinger define a la superposición como un sistema que existe simultáneamente en múltiples estados posibles hasta que una medición haga colapsar al sistema en uno de esos posibles estados [1]. En el campo de las imágenes, la superposición se refiere a qué múltiples imágenes se superponen, lo que puede dificultar la identificación de cada una.

El estudio de la superposición en imágenes es algo reciente y se encuentra en el campo de estudio de la informática y la visión artificial. La introducción del concepto de superposición de imágenes no se puede atribuir a una sola persona, sin embargo, gracias a la inteligencia artificial, su estudio ha avanzado significativamente y esto es debido a algunas técnicas de procesamiento de imágenes y algunos algoritmos como los de optimización. Varios investigadores han trabajado sobre este concepto en campos como la restauración de imágenes, la visión por computadora y la inteligencia artificial.

Existen varios tipos de superposición de imágenes con propósitos específicos [2], a continuación se presentan algunas de ellas:

- Superposición con transparencia: Permite que ambas imágenes sean parcialmente visibles y se clasifican en transparencia global y de capas.

- Superposición mediante *blending*: Implica la mezcla de imágenes mediante diferentes modos matemáticos, afectando la forma en que se combinan los píxeles.
- Superposición basada en máscaras: Utiliza una máscara para determinar qué partes de la imagen subyacente o superpuesta serán visibles.
- Superposición de canales de color: Combinan los canales de color (rojo, verde, azul) de distintas imágenes para crear combinaciones únicas.
- Superposición con distorsión o transformación: Implica la aplicación de distorsiones o transformaciones (como rotación, escalado o perspectiva) antes de la superposición de imágenes.
- Superposición en animación o vídeo: Se refiere a la práctica de superponer imágenes en secuencias de cuadros para generar efectos visuales dinámicos, comunes en el procesamiento de vídeo.

Para el trabajo presente, se empleará la técnica de superposición *blending*, que se llevará a cabo mediante el uso de una memoria asociativa denominada *linear associator*, con lo cual se pretende generar un tipo de superposición que mezcle los píxeles de las imágenes de tal forma que presente una mayor dificultad a la hora de sustraer las imágenes que la conforman.

Las memorias asociativas son sistemas que están diseñados para reconocer patrones mediante la asociación de pares de entrada, esto permite la recuperación del par correspondiente a un patrón de entrada.

Su objetivo es la recuperación de patrones completos a partir de patrones de entrada.

A pesar de que las memorias asociativas se centran en problemas de recuperación, también se han adaptado para funcionar como clasificadores en tareas de reconocimiento de patrones y han mostrado un buen desempeño en sus resultados.

Una memoria asociativa es creada con base en un asociador de patrones estándar, el cual se compone de una estructura que tiene entradas y salidas totalmente interconectadas. Esta interconexión provoca que el conocimiento sea almacenado a través de todas las conexiones, permitiendo múlti-asociaciones. Este fenómeno está basado en que la sinapsis de dos neuronas es fortalecida cuando son activadas simultáneamente [3].

Este modelo da lugar a dos enfoques en el ámbito de

los modelos asociativos. Uno fue propuesto por Marvin Minsky y Seymour Papert [4], en 1969, publicaron *Perceptrons*, donde se estudiaron las limitaciones de un modelo de red neuronal simple llamado perceptrón. El otro enfoque fue desarrollado por Karl Steinbuch [5], en 1961, propuso la *Lernmatrix*, este es un modelo de memoria asociativa que se inspira en las propiedades de las redes eléctricas y es utilizada para almacenar y recuperar información. La *Lernmatrix* ha influido en el avance de modelos más complejos en el estudio de la memoria y el aprendizaje de máquinas.

Después del invierno de la inteligencia artificial, John J. Hopfield [6] desarrolló en 1982 el modelo de red neuronal *Hopfield*, este modelo está clasificado como una red neuronal recurrente. Es utilizado principalmente para almacenar y recuperar patrones, funciona como una memoria asociativa en la que los patrones son representados como puntos de atracción en un paisaje energético. Cuando se presenta una entrada, la red tiene la capacidad de converger hacia uno de los patrones almacenados y esto permite una recuperación de la información.

Anderson y Kohonen [7] propusieron el *Linear Associator* como una memoria hetero asociativa. A diferencia de los modelos auto asociativos como las redes de *Hopfield*, se utiliza para asociar un conjunto de entrada con un conjunto diferente de salida, por lo que el sistema busca establecer una asociación entre dos conjuntos distintos de datos.

Para la recuperación de imágenes, existen diversos trabajos que abordan este problema desde distintos enfoques. En [8], muestran técnicas que se dividen en dos categorías principales, la recuperación exacta de imágenes, que emplea métodos como el *hashing* perceptual, los histogramas de color y la búsqueda basada en metadatos y la segunda categoría es la recuperación de imágenes basada en contenido, por sus siglas en inglés, conocida como *Content Based Image Retrieval*, *CBIR*. En el presente trabajo, nos enfocaremos en la *CBIR*, debido a que técnicas como las redes neuronales ofrecen una alta capacidad de aprendizaje adaptativo, lo que las hace muy eficaces para esta problemática, tal como se menciona en [9], [10], [11].

En [12], se presenta una clasificación que describe que los sistemas eficientes para la recuperación de imágenes se ha centrado en la recuperación basada en texto por sus siglas en inglés *Text Based Image Retrieval*, *TBIR* y la recuperación basada en contenido *CBIR*. Este último presenta tres fases clave: extracción, selección de características y comparación de similitudes y utiliza propiedades como el color, la forma o la textura. Estos experimentos demuestran que combinar múltiples

características mejora el rendimiento de *CBIR* pero, el aprendizaje automático, a través de máquinas de soporte vectorial, por sus siglas en inglés, *Support Vector Machines*, *SVM*, ofrece una mayor precisión para la recuperación de imágenes.

Una aplicación importante está en los sistemas de recuperación de imágenes médicas basados en contenido *CBMIR*, que enfrentan desafíos como la alta demanda computacional y la dificultad de manejar la variabilidad intra-clase e inter-clase en bases de datos médicas. El estudio de [13] propone un sistema que incluye: 1) preprocesamiento y extracción de características utilizando análisis de correlación canónica por sus siglas en inglés, *Canonical Correlation Analysis*, *CCA*, 2) agrupación *Fuzzy C* basada en la intensidad de los píxeles, 3) una red neuronal convolucional profunda con clasificador *SVM* para obtener una representación compacta, y 4) evaluación del rendimiento basado en precisión y exactitud. Los resultados indican una exactitud del 95.8%, superando los enfoques tradicionales, lo que lo convierte en un sistema ideal para la recuperación de imágenes médicas.

En [14], muestra que la recuperación de imágenes basada en contenido *CBIR* ha adquirido gran importancia en la última década debido a la creciente necesidad de acceder a bases de datos multimedia. Este estudio presenta un sistema *CBIR* innovador que emplea el *Local Neighbor Pattern LNP* junto con técnicas de aprendizaje automático supervisado, evaluando su rendimiento en comparación con el *Local Tetra Pattern LTrP*, mediante bases de datos de rostros como *Corel 1k*, *Vistex* y *TDF*. Los análisis demuestran que *LNP* supera a *LBP*, *LDP* y *LTrP* en términos de recuperación promedio, y al combinar *LNP* con aprendizaje automático, se logra un aumento significativo en la precisión, pasando del 36.23 % al 85.60 % con *SVM* cúbico en *Corel 1K*, del 82.51 % al 99.50 % con *K-Nearest Neighbors*, *KNN* fino en *Vistex*, y del 56.63 % al 95 % al utilizar el discriminante de subespacio en la base de datos de rostros.

Estos enfoques basados en aprendizaje de máquina, resultan ser muy útiles en la tarea de recuperación de imágenes, pero algunos investigadores se introducen al campo de la optimización para poder encontrar soluciones más eficientes o atacar otros problemas que surgen a la hora de resolver estas problemáticas. En el siguiente trabajo [15], se estudia un problema de programación cuadrática generalizada con términos I_1 no diferenciables, utilizando cálculo sub diferencial para determinar las condiciones de optimalidad. Se propone un método de conjunto activo para su resolución numérica y se evalúa su convergencia. Además, se aplica al problema de recuperación de imágenes, donde los términos I_1 ayudan a reducir el ruido. Se presentan ensayos numéricos con dos códigos: uno desarrollado

por los autores y otro utilizando *quadprog* de la *Optimization Toolbox* de MATLAB.

En [16], la investigación sobre la combinación de aprendizaje y visión por computadora en la recuperación de imágenes interactivas ha avanzado, pero muchas técnicas actuales se basan en heurísticas y no abordan adecuadamente las condiciones operativas ni el aprendizaje efectivo de los usuarios en presencia de múltiples características visuales, este artículo presenta una formulación de optimización robusta que utiliza multiplicadores de Lagrange para derivar soluciones óptimas y rápidas de calcular.

Uno de los trabajos en usar los algoritmos de optimización se ve en [17], en donde se menciona que los métodos de retroalimentación de relevancia en la Recuperación de Imágenes Basada en Contenido *CBIR* utilizan la información del usuario de manera iterativa para identificar muestras relevantes en el espacio de búsqueda. Un algoritmo eficaz debe equilibrar la exploración de nuevas regiones de interés y la explotación de áreas cercanas a las muestras relevantes. Sin embargo, muchos algoritmos se enfocan en áreas cercanas a las imágenes marcadas como relevantes, lo que maximiza la recuperación inicial de imágenes relevantes, pero limita el descubrimiento de nuevas áreas. Este artículo propone un que utiliza un algoritmo de búsqueda dispersa basado en *NSGA II* en la primera iteración y luego cambia a un algoritmo de explotación. Este método ha sido probado en tres bases de datos y muestra resultados competitivos.

En este trabajo [18], muestran que, la recuperación de imágenes basada en contenido, con descriptores de color, textura y forma, dependen del tamaño y de la precisión de clasificación. Aunque se han propuesto métodos como *NSGA-II* y *NSMO-PSO* para abordar este problema multi objetivo, presentan alta complejidad temporal y espacial. Presentan un nuevo algoritmo de optimización basado en ballenas, *NSMO-WOA*, que reduce estas complejidades y mejora el rendimiento en términos de *recall* y precisión.

Una vez realizado el análisis anterior, es conveniente realizar un estudio sobre estas problemáticas dado que en trabajos actuales no se encuentra alguna aplicación sobre la generación de imágenes superpuestas mediante esta técnica y aunque si se utilizan algoritmos de optimización en la recuperación de imágenes no se realizan con el enfoque de sustracción de imágenes.

II. METODOLOGÍA

En esta sección se propone describir las etapas del experimento planteado, el cual en su totalidad consiste en la generación de imágenes superpuestas y en la recuperación de una de estas imágenes, sustrayéndola

al reducir la mínima diferencia normalizada mediante el algoritmo de optimización bisección.

II-A. Generación de la imagen superpuesta.

Para la generación de la imagen superpuesta se va a utilizar la memoria asociativa "Linear Associator", como se muestra a continuación:

1. Se tienen dos imágenes en su forma matricial.

$$A_{j,i} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,i} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,i} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & a_{j,3} & \dots & a_{j,i} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$B_{j,i} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,i} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,i} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \dots & b_{3,i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{j,1} & b_{j,2} & b_{j,3} & \dots & b_{j,i} \end{bmatrix} \quad (2)$$

2. Se realizan las asociaciones mediante la fase de entrenamiento del linear associator, descomponiendo cada matriz en dos vectores columna con todas las filas concatenadas.

$$A_{j,i}^{\mu} = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{\mu} \\ \dots \\ a_{1,i}^{\mu} \\ a_{2,1}^{\mu} \\ \dots \\ a_{2,i}^{\mu} \\ a_{j,1}^{\mu} \\ \dots \\ a_{j,i}^{\mu} \end{bmatrix}, \quad B_{j,i}^{\mu} = \begin{bmatrix} b_{1,1}^{\mu} \\ \dots \\ b_{1,i}^{\mu} \\ b_{2,1}^{\mu} \\ \dots \\ b_{2,i}^{\mu} \\ b_{j,1}^{\mu} \\ \dots \\ b_{j,i}^{\mu} \end{bmatrix}$$

3. Se genera la matriz de asociaciones mediante el producto punto del vector columna A_j^i con el vector columna transpuesto $B_j^i T$.

$$M_{j,i}^{\mu} = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n (A_{j,i}^{\mu} \bullet B_{j,i}^{\mu T}) \quad (3)$$

4. Esto se realiza para P asociaciones, siendo $P = 1$, hasta $P = n$, donde n es el número total de asociaciones realizadas por cada imagen y se suman para formar la matriz de entrenamiento.

$$M_{Ent} = \sum_{\mu=1}^P M_{j,i}^{\mu} \quad (4)$$

5. Se hace la etapa de recuperación de imágenes, al operar una imagen que se desee recuperar, C_j^i .

$$C_{j,i} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & \dots & c_{1,i} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & \dots & c_{2,i} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & \dots & c_{3,i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{j,1} & c_{j,2} & c_{j,3} & \dots & c_{j,i} \end{bmatrix} \quad (5)$$

6. Se genera el vector columna $C_{j,i}^{\mu}$.

$$C_{j,i}^{\mu} = \begin{bmatrix} c_{1,1}^{\mu} \\ \dots \\ c_{1,i}^{\mu} \\ c_{2,1}^{\mu} \\ \dots \\ c_{2,i}^{\mu} \\ c_{j,1}^{\mu} \\ \dots \\ c_{j,i}^{\mu} \end{bmatrix} \quad (6)$$

7. Se hace el producto punto entre M_{Ent} y el vector $C_{j,i}^{\mu}$.

$$M_{Rec}^{\mu} = \left[\sum_{\mu=1}^P A_{j,i}^{\mu} \bullet (B_{j,i}^{\mu})^T \right] \bullet C_{j,i}^{\mu} \quad (7)$$

8. Al final se suman todas las matrices de recuperación para generar la imagen que resulta de la superposición.

$$I_{j,i}^S = \sum_{\mu=1}^P M_{Rec}^{\mu} \quad (8)$$

De esta forma se crea la imagen con superposición mediante linear asociator, al estudiar este modelo asociativo se percata que la recuperación es incorrecta, por lo que se implementaron otras técnicas para obtener la recuperación de la imagen deseada, ya que no se consiguió con técnicas de filtrado ni operaciones matemáticas, por lo que se planteó un problema de optimización [19] para minimizar la diferencia normalizada [20], [21] entre la imagen con superposición y la imagen a recuperar.

II-B. Recuperación de imagen mediante sustracción optima.

Para este método de sustracción se utiliza un algoritmo determinístico para la búsqueda de raíces llamado método de bisección, el cual es utilizado para encontrar las raíces en un polinomio y con base en su naturaleza lo utilizaremos para minimizar el error entre la imagen con superposición y la que deseamos recuperar, la mínima diferencia normalizada es la métrica que se va a minimizar, la idea principal es calcular la diferencia entre dos valores (o conjuntos de valores) de manera que esta diferencia sea independiente

de la escala o magnitud de los datos, para hacer comparaciones más justas o equilibradas.

La mínima diferencia normalizada se presenta de la siguiente manera:

$$MDN = \frac{|I_{j,i}^S - I_{j,i}^R|}{\max(I_{j,i}^S, I_{j,i}^R)} \quad (9)$$

En donde:

- $I_{j,i}^S$: Es la imagen generada por la superposicion.
- $I_{j,i}^R$: Es la imagen a recuperar.
- $\max(I_{j,i}^S, I_{j,i}^R)$: Es el valor máximo que existe entre esas matrices.

El algoritmo del método de bisección se define de la siguiente forma:

Algorithm 1 Método de Bisección

```

1: Entrada: Intervalo  $[a, b]$ , función  $f(x)$ , tolerancia  $\text{tol}$ 
2: Requisito:  $f(a) \cdot f(b) < 0$ 
3: while  $|b - a| > \text{tol}$  do
4:   Calcular punto medio  $c = \frac{a+b}{2}$ 
5:   if  $f(c) = 0$  then
6:     Retornar  $c$  como la raíz exacta
7:   else if  $f(a) \cdot f(c) < 0$  then
8:      $b = c$ 
9:   else
10:     $a = c$ 
11:   end if
12: end while
13: Salida:  $c$  como aproximación de la raíz

```

Por ultimo se propone la sustraccion optima como un problema de optimización sin restricciones:

$$\vec{p}_1 = [I_L]$$

$$\min_{\vec{P}_1} J^1$$

Sujeto a:

$$I_{j,i}^{S+1} = \frac{I_{j,i}^R - I_{j,i}^S}{2}$$

$$\vec{P}_{1\min} < \vec{P}_1 < \vec{P}_{1\max}$$

Donde:

$$J^1 = \frac{|I_{j,i}^S - I_{j,i}^R|}{\max(I_{j,i}^S, I_{j,i}^R)}$$

para este problema de optimización:

- $\vec{P}_1$: Es la variable de diseño que es la intensidad luminosa.
- J^1 : Es la funcion a minimizar, para este caso es la mínima diferencia normalizada.
- $I_{j,i}^{S+1}$: Es la nueva matriz que entrega el algoritmo de bisección, conforme se reduce la diferencia normalizada.
- $\vec{P}_{1\min}$ y $\vec{P}_{1\max}$: Son los limites de la variable de diseño, $\in [0, 255]$.

Una vez terminada la fase de recuperación, es necesario tener métricas que nos permitan evaluar el comportamiento del experimento y para eso utilizaremos, el error cuadrático medio por sus siglas en inglés *Mean Square Error*, *MSE*, que calcula el promedio del error al cuadrado, el índice de similitud estructural por sus siglas en inglés *Structural Similarity Index*, *SSIM*, es una métrica usada para medir la similitud entre dos imágenes. A diferencia de otras métricas como el *MSE*, el *SSIM* tiene en cuenta características visuales más complejas como la luminancia, el contraste y la estructura, por último utilizaremos el coeficiente de correlación de *Pearson* por sus siglas en inglés *Pearson Correlation Coefficient*, *PCC*, este es una medida que evalúa la relación lineal entre dos variables, a continuación los presentamos en su forma matemática:

1. Error cuadrático medio (MSE).

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (10)$$

donde:

- N : Es el número total de muestras o píxeles.
- y_i : Es el valor real del dato i-ésimo.
- $\hat{y}_i$: Es el valor predicho o estimado para el dato i-ésimo.

- $(y_i - \hat{y}_i)^2$: Es el error cuadrático entre el valor real y el valor predicho para el dato i -ésimo.

$$S(x, y) = \frac{\sigma_{xy} + C_3}{\sigma_x \sigma_y + C_3} \quad (14)$$

2. Índice de similitud estructural (SSIM).

El SSIM se obtiene a partir de:

$$SSIM(x, y) = L(x, y)C(x, y)S(x, y) \quad (11)$$

donde:

- $L(x, y)$: Es la luminancia, esta evalúa la similitud en el brillo entre dos imágenes. Se calcula de la siguiente manera:

$$L(x, y) = \frac{2\psi_x\psi_y + C_1}{\psi_x^2 + \psi_y^2 + C_1} \quad (12)$$

donde:

- ψ_x y ψ_y : Son las medias de las intensidades de las imágenes x e y .
- C_1 : Es una constante pequeña utilizada para evitar divisiones por cero.
- $C(x, y)$: Es el contraste y mide cómo varía la intensidad de los píxeles en las imágenes. Se calcula de la siguiente manera:

$$C(x, y) = \frac{2\sigma_x\sigma_y + C_2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2} \quad (13)$$

donde:

- σ_x y σ_y : Son las desviaciones estándar de las imágenes x e y .
- C_2 : Otra constante muy pequeña que evita divisiones por cero.
- $S(x, y)$: La estructura mide la similitud en las texturas o patrones entre las imágenes. Se define de la siguiente manera:

donde:

- σ_{xy} : es la covarianza entre las dos imágenes.
- C_3 : Otra constante muy pequeña que evita divisiones por cero.

- C_1, C_2 y C_3 : Son constantes que evitan dividir por cero y se calculan de la siguiente manera:

$$C_1 = (K_1 L)^2 \quad (15)$$

$$C_2 = (K_2 L)^2 \quad (16)$$

$$C_3 = \frac{C_2}{2} \quad (17)$$

donde:

- k_1 : Es un valor muy pequeño, típicamente $k_1 \approx 0,01$.
- k_2 : Es un valor muy pequeño, típicamente $k_2 \approx 0,03$.
- L : Es el valor máximo de luminancia (por ejemplo, 255 para imágenes de 8 bits).

3. Coeficiente de correlación de Pearson (PCC).

Es una medida estadística que indica la fuerza y la dirección de una relación lineal entre dos variables. Este coeficiente, denotado por r , varía entre -1 y 1, donde:

- $r = 1$: Indica una correlación positiva perfecta (las dos variables aumentan juntas).
- $r = -1$: Indica una correlación negativa perfecta (cuando una variable aumenta, la otra disminuye de forma proporcional).
- $r = 0$: Indica que no hay correlación lineal entre las variables.

La fórmula para calcular el coeficiente de correlación de Pearson entre dos variables x e y , se describe a continuación:

$$r = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}} \quad (18)$$

donde:

- n : Es el número de pares de datos.
- $\sum xy$: Es la suma de los productos de los valores x e y .
- $\sum x$ y $\sum y$: Son la suma de los valores x e y .
- $\sum x^2$ y $\sum y^2$: Es la suma de los cuadrados de los valores x e y .
- Numerador: Mide la covarianza entre las dos variables.
- Denominador: Ajusta la covarianza dividiendo por las desviaciones estándar de x e y , lo que asegura que el resultado esté acotado entre -1 y 1.

III. RESULTADOS

En esta sección se presentan, los experimentos realizados, en el presente trabajo.

Se toman tres imágenes en blanco y negro de 80x80 píxeles, las cuales se muestran a continuación:

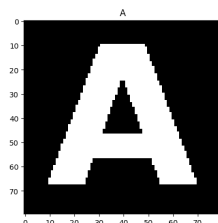


Figura 1. Imagen A.

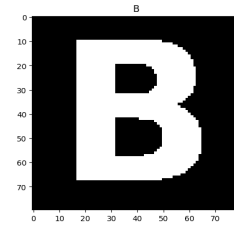


Figura 2. Imagen B.

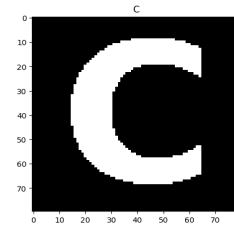


Figura 3. Imagen C.

Ahora se muestran las imágenes anteriores con un ruido, sal y pimienta al 5 % y después con ruido al 50 %:

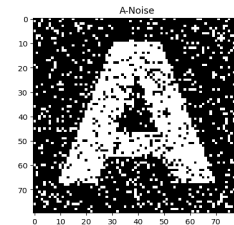


Figura 4. Imagen A con ruido, sal y pimienta al 5 %.

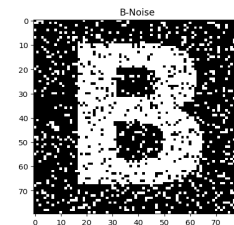


Figura 5. Imagen B con ruido, sal y pimienta al 5 %.

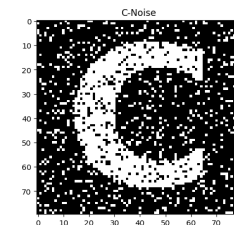


Figura 6. Imagen C con ruido, sal y pimienta al 5 %.

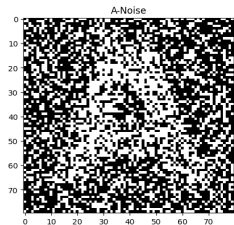


Figura 7. Imagen A con ruido, sal y pimienta al 50 %.

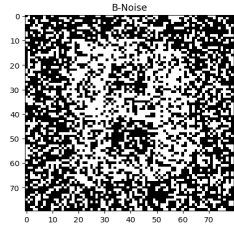


Figura 8. Imagen B con ruido, sal y pimienta al 50 %.

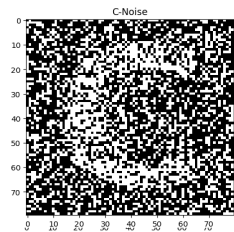


Figura 9. Imagen C con ruido, sal y pimienta al 50 %.

Una vez obtenidas las imágenes se procede hacer la superposición mediante *Linear Associator*, para esto se realizaron tres Experimentos:

1. Memoria auto asociativa: Se realiza la asociación de cada imagen consigo misma.
2. Memoria hetero asociativa de imágenes originales y con ruido: Se realiza la asociación de las imágenes originales con ellas mismas pero con ruido, sal y pimienta.
3. Memoria hetero asociativa de imágenes con diferentes intensidades de ruido: Se realiza la asociación entre dos imágenes con distintas intensidades de ruido.

A continuación se mostrarán los experimentos antes mencionados:

1. Memoria auto asociativa.

- Se realizan las auto asociaciones.

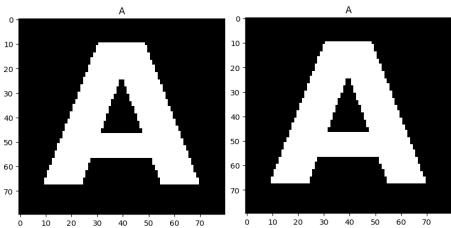


Figura 10. Auto asociación de la primera imagen.

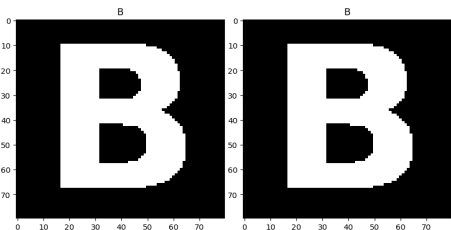


Figura 11. Auto asociación de la segunda imagen.

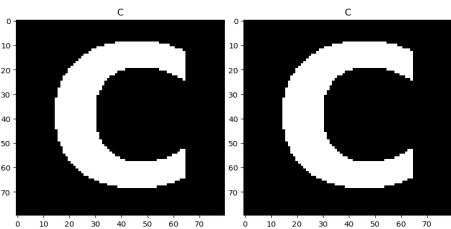


Figura 12. Auto asociación de la tercera imagen.

- Se realiza la superposición de imágenes.

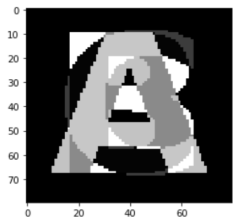


Figura 13. Imagen superpuesta resultante de la Auto asociación.

- Una vez generada la imagen superpuesta por el método, se hace la recuperación mediante sustracción óptima.

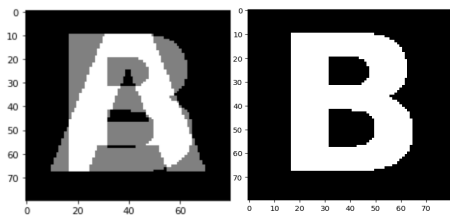


Figura 14. Imagen recuperada.

Como se puede observar para este experimento se recupera la imagen con la letra "B".

2. Memoria hetero asociativa de imágenes originales y con ruido.

- Se realizan las asociaciones.

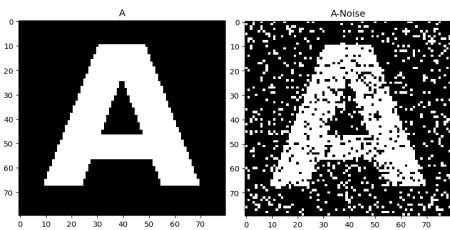


Figura 15. Hetero asociación de la primera imagen e imagen con ruido al 5 %.

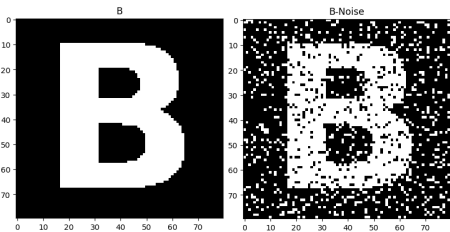


Figura 16. Hetero asociación de la segunda imagen e imagen con ruido al 5 %.

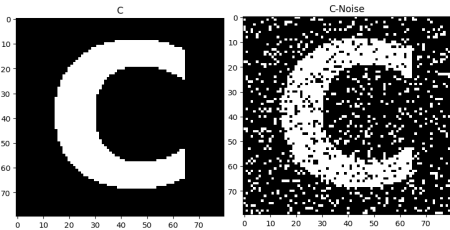


Figura 17. Hetero asociación de la tercera imagen e imagen con ruido al 5 %.

- Se realiza la superposición de imágenes.

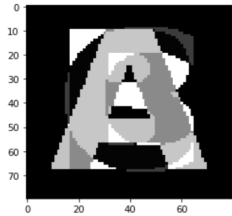


Figura 18. Imagen superpuesta resultante de la hetero asociación.

- Una vez generada la imagen superpuesta por el método, se hace la recuperación mediante sustracción óptima.

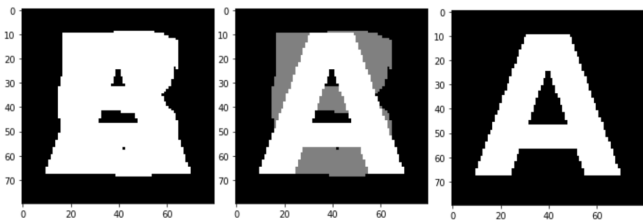


Figura 19. Imagen recuperada.

Como se puede observar para este experimento se recupera la imagen con la letra "A".

3. Memoria hetero asociativa de imágenes con diferentes intensidades de ruido.

- Se realizan las asociaciones.

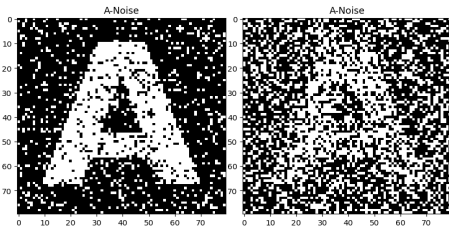


Figura 20. Hetero asociación de la primera imagen con distintas intensidades ruido.

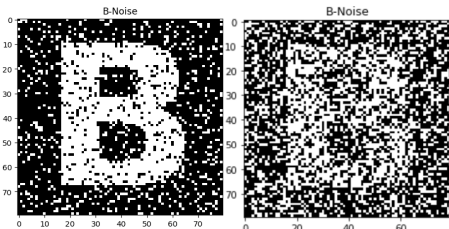


Figura 21. Hetero asociación de la segunda imagen con distintas intensidades ruido.

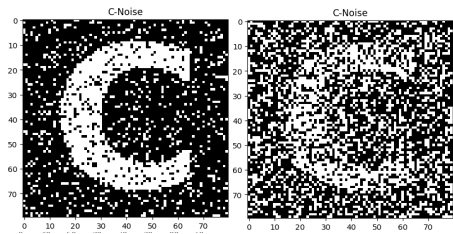


Figura 22. Hetero asociación de la tercera imagen con distintas intensidades ruido.

- Se realiza la superposición de las imágenes.

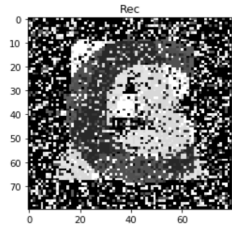


Figura 23. Imagen superpuesta resultante de la hetero asociación.

- Una vez generada la imagen superpuesta por el método, se hace la recuperación mediante sustracción óptima.

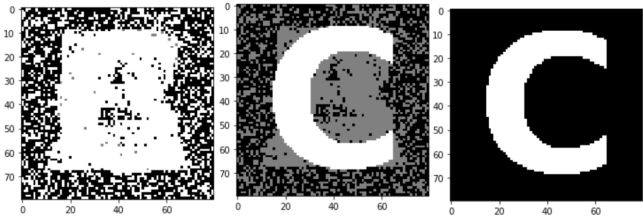


Figura 24. Imagen recuperada.

Como se puede observar para este experimento se recupera la imagen con la letra "C".

Una vez realizados los experimentos es necesario utilizar algún tipo de métrica para conocer que desempeño obtuvo el método de recuperación denominado sustracción óptima y para esto se presentan una serie de tablas con los tres criterios mencionados, el primero es para el *MSE*, el cual habrá de comparar la imagen recuperada con la imagen original, esto se realiza pixel a pixel y al final esta métrica proporciona el promedio de la suma del error al cuadrado, como se ve a continuación:

Tabla I
RESULTADOS DE LAS COMPARACIONES DE LA IMAGEN RECUPERADA PARA MSE EXPERIMENTO 1.

id	Letra	MSE	Generaciones utilizadas
1	B	0.0	3
2	B	0.0	3
3	B	0.0	3
4	B	0.0	3
5	B	0.0	3
6	B	0.0	3
7	B	0.0	3
8	B	0.0	3
9	B	0.0	3
10	B	0.0	3

Tabla II
RESULTADOS DE LAS COMPARACIONES DE LA IMAGEN RECUPERADA PARA MSE EXPERIMENTO 2.

id	Letra	MSE	Generaciones utilizadas
1	A	0.0	4
2	A	0.0	4
3	A	0.0	4
4	A	0.0	4
5	A	0.0	4
6	A	0.0	4
7	A	0.0	4
8	A	0.0	4
9	A	0.0	4
10	A	0.0	4

Tabla III
RESULTADOS DE LAS COMPARACIONES DE LA IMAGEN RECUPERADA PARA MSE EXPERIMENTO 3.

id	Letra	MSE	Generaciones utilizadas
1	C	0.0	4
2	C	0.0	4
3	C	0.0	4
4	C	0.0	4
5	C	0.0	4
6	C	0.0	4
7	C	0.0	4
8	C	0.0	4
9	C	0.0	4
10	C	0.0	4

Ahora se presentan las tablas de los resultados del índice de similitud estructural para cada uno de los experimentos, este índice se utiliza para la evaluación de la calidad visual, su propósito es medir la similitud entre dos imágenes, considerando factores que afectan la percepción humana como la luminancia que compara el brillo entre ambas imágenes, el contraste que compara la variación de intensidad entre píxeles y la estructura que compara las texturas entre imágenes como granos, líneas, rugosidades y patrones repetitivos, a continuación se observan las tablas con los resultados para el *SSIM*:

Tabla IV
RESULTADOS DE LAS COMPARACIONES DE LA IMAGEN
RECUPERADA PARA SSIM EXPERIMENTO 1.

id	Letra	SSIM	Generaciones utilizadas
1	B	1.0	3
2	B	1.0	3
3	B	1.0	3
4	B	1.0	3
5	B	1.0	3
6	B	1.0	3
7	B	1.0	3
8	B	1.0	3
9	B	1.0	3
10	B	1.0	3

Tabla VII
RESULTADOS DE LAS COMPARACIONES DE LA IMAGEN
RECUPERADA PARA PCC EXPERIMENTO 1.

id	Letra	PCC	Generaciones utilizadas
1	B	1.0	3
2	B	1.0	3
3	B	1.0	3
4	B	1.0	3
5	B	1.0	3
6	B	1.0	3
7	B	1.0	3
8	B	1.0	3
9	B	1.0	3
10	B	1.0	3

Tabla V
RESULTADOS DE LAS COMPARACIONES DE LA IMAGEN
RECUPERADA PARA SSIM EXPERIMENTO 2.

id	Letra	SSIM	Generaciones utilizadas
1	A	1.0	4
2	A	1.0	4
3	A	1.0	4
4	A	1.0	4
5	A	1.0	4
6	A	1.0	4
7	A	1.0	4
8	A	1.0	4
9	A	1.0	4
10	A	1.0	4

Tabla VIII
RESULTADOS DE LAS COMPARACIONES DE LA IMAGEN
RECUPERADA PARA PCC EXPERIMENTO 2.

id	Letra	PCC	Generaciones utilizadas
1	A	1.0	4
2	A	1.0	4
3	A	1.0	4
4	A	1.0	4
5	A	1.0	4
6	A	1.0	4
7	A	1.0	4
8	A	1.0	4
9	A	1.0	4
10	A	1.0	4

Tabla VI
RESULTADOS DE LAS COMPARACIONES DE LA IMAGEN
RECUPERADA PARA SSIM EXPERIMENTO 3.

id	Letra	SSIM	Generaciones utilizadas
1	C	0.99999999	4
2	C	0.99999999	4
3	C	0.99999999	4
4	C	0.99999999	4
5	C	0.99999999	4
6	C	0.99999999	4
7	C	0.99999999	4
8	C	0.99999999	4
9	C	0.99999999	4
10	C	0.99999999	4

Tabla IX
RESULTADOS DE LAS COMPARACIONES DE LA IMAGEN
RECUPERADA PARA PCC EXPERIMENTO 3.

id	Letra	PCC	Generaciones utilizadas
1	C	1.0	4
2	C	1.0	4
3	C	1.0	4
4	C	1.0	4
5	C	1.0	4
6	C	1.0	4
7	C	1.0	4
8	C	1.0	4
9	C	1.0	4
10	C	1.0	4

A continuación se presenta una tabla resumen en la cual podemos observar los resultados promedios obtenidos por *MSE*, *SSIM* y *PCC*:

Tabla X
RESULTADOS PROMEDIOS DE LAS COMPARACIONES DE LAS
IMÁGENES RECUPERADAS CONTRA LAS ORIGINALES.

Experimento	1	2	3	Promedio
MSE	0.0	0.0	0.0	0.0
SSIM	1.0	1.0	0.99999999	1.0
PCC	1.0	1.0	1.0	1.0

IV. DISCUSIÓN

Durante las pruebas realizadas en el presente trabajo, se puede observar que la técnica propuesta para realizar la superposición de imágenes cumple su

Por último se presentan los resultados obtenidos por el coeficiente de correlación de *Pearson* este nos indica si hay una correlación lineal entre las imágenes o no, significa que si es uno las dos imágenes tienen similitud en las intensidades de los píxeles lo cual manifiesta una correlación lineal si es cero significa que no hay correlación lineal o sea no se parecen y si es -1 significa que son inversas, a continuación se muestran las tablas con los resultados de la métrica *PCC*:

función, ya que la memoria asociativa es utilizada en problemas de reconocimiento de patrones y presenta un buen desempeño con bancos de datos en la tarea de clasificación, entonces se parte de la hipótesis que por sí misma debería de recuperar la imagen en su etapa de recuperación, pero esta no lo hace, por lo que demuestra presentar buen desempeño al hacer *blending* con los píxeles asociados.

Para el segundo experimento parece que la imagen resultante de la superposición por *linear associator* es casi igual a la primera y esto es debido a que solo se añadió el 5 % de ruido, sal y pimienta.

Para el tercer experimento notamos la afectación de las imágenes con ruido, sal y pimienta al 50 % y al 5 %, en la superposición de imágenes, presentando una muy buena distorsión de las imágenes, por lo que solo resta aplicar la sustracción óptima para la recuperación de las imágenes.

Sabemos que los algoritmos de optimización son diseñados específicamente para maximizar o minimizar una función objetivo y aunque el método de bisección está inspirado en la detección de raíces polinomiales, por su fácil implementación, lo utilizamos para minimizar la diferencia normalizada entre ambas imágenes lo que permite recuperar la imagen cuando la diferencia normalizada llega a cero o a un criterio de paro muy cercano a cero.

V. CONCLUSIONES

En el trabajo presente se logró realizar una superposición de imágenes mediante una memoria asociativa llamada *linear associator* y que además presento buen desempeño con respecto de las otras técnicas de superposición *blending* que son operaciones matemáticas básicas como: la suma, resta, multiplicación o división. Debido a que no recupero la imagen en la etapa de recuperación de este modelo asociativo, al contrario, realizo otra etapa de *blending* que mezclo aún más los píxeles.

También se logró realizar la sustracción óptima de imágenes mediante un problema de optimización, el cual minimiza la diferencia normalizada entre la imagen superpuesta y la imagen a recuperar con respecto a la luminancia de cada píxel.

Algunas aplicaciones serían en el campo del procesamiento digital de señales, por ejemplo, siendo cada canal una pista generada por un instrumento musical y la superposición de señales una canción, si esta se llegara a contaminar con ruido o alguna otra señal indeseable, siempre podríamos recuperar las

señales originales, otra aplicación pudiera ser en la criptografía, haciendo esta superposición de imágenes para encriptar un mensaje y que con la llave haciendo la sustracción óptima se pueda encontrar el mensaje oculto.

En un futuro se pretende experimentar con otros modelos asociativos la problemática de recuperación de imágenes y diseñar una aplicación en un sistema físico.

VI. AGRADECIMIENTOS

Se extiende un cálido agradecimiento al congreso internacional de mecatrónica, control e inteligencia artificial (CIMCIA), de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM, por aperturar este espacio.

REFERENCIAS

- [1] Erwin Schrödinger. Quantisierung als eigenwertproblem (erste mitteilung). *Annalen der Physik*, 79:361–376, 1926.
- [2] The MathWorks. Digital image processing with matlab and simulink, 2024. Accessed: 2024-09-26.
- [3] D. O. Hebb. *The Organization of Behavior: A Neuropsychological Theory*. Wiley, New York, 1949.
- [4] Marvin Minsky and Seymour Papert. *Perceptrons*. MIT Press, Cambridge, MA, 1969.
- [5] K. Steinbuch. Die lernmatrix. *Kybernetik*, 1(1):36–45, 1961.
- [6] J. J. Hopfield. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 79(8):2554–2558, 1982.
- [7] James A. Anderson and Teuvo Kohonen. *Associative Networks: Representation and Use of Knowledge by Connectionist Models*. Academic Press, New York, 1981. Contains discussions on the Linear Associator and associative memory models.
- [8] Mussarat Yasmin, Sajjad Mohsin, and Muhammad Sharif. Intelligent image retrieval techniques: A survey. *Journal of Applied Research and Technology*, 12(1):87–103, 2014.
- [9] Nguyen Duc Anh, Pham The Bao, Bui Ngoc Nam, and Nguyen Huy Hoang. A new cbir system using sift combined with neural network and graph-based segmentation. In *Intelligent Information and Database Systems: Second International Conference, ACIIDS, Hue City, Vietnam, March 24-26, 2010. Proceedings, Part I 2*, pages 294–301. Springer, 2010.
- [10] Christos Theoharatos, Nikolaos Laskaris, George Economou, and Spiros Fotopoulos. Combining self-organizing neural nets with multivariate statistics for efficient color image retrieval. *Computer Vision and Image Understanding*, 102(3):250–258, 2006.
- [11] Ernesto Bribiesca et al. Polygonal approximation of contour shapes using corner detectors. *JART*, 7(3), 2009.
- [12] P. Desai, J. Pujari, and Akhila. Impact of multi-feature extraction on image retrieval and classification using machine learning techniques. *SN Computer Science*, 2:153, 2021.
- [13] L. R. Nair, K. Subramaniam, and G. K. D. P. Venkatesan. An efficient image retrieval system using machine learning and a fuzzy c-means clustering approach. *Multimedia Tools and Applications*, 79:10123–10140, 2020.
- [14] KP Alrahal, Maher y Supreethi. Content-based image retrieval using local patterns and supervised machine learning techniques. In *International Conference Amity 2019 about Artificial Intelligence (AICAI)*, pages 118–124, 2019.
- [15] Carlos Laguillo García et al. Técnica de optimización para la recuperación de imágenes. 2015.
- [16] Y. Rui and T. Huang. Optimizing learning in image retrieval. In *Proceedings IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. CVPR 2000 (Cat. No.PR00662)*, volume 1, pages 236–243 vol.1, 2000.
- [17] Miguel Arevalillo-Herráez, Francesc J. Ferri, and Salvador Moreno-Picot. A hybrid multi-objective optimization algorithm for content based image retrieval. *Applied Soft Computing*, 13(11):4358–4369, 2013.
- [18] M.A.E. Aziz, A.A. Ewees, and A.E. Hassanien. Multi-objective whale optimization algorithm for content-based image retrieval. *Multimedia Tools and Applications*, 77:26135–26172, 2018.
- [19] Singiresu S Rao. *Engineering optimization: theory and practice*. John Wiley & Sons, 2019.
- [20] Rogelio Ramírez-Rubio, Mario Aldape-Pérez, Cornelio Yáñez-Márquez, Itzamá López-Yáñez, and Oscar Camacho-Nieto. Pattern classification using smallest normalized difference associative memory. *Pattern Recognition Letters*, 93:104–112, 2017.
- [21] Irving Luna-Ortiz, Mario Aldape-Pérez, Abril Valeria Uriarte-Arcia, Alejandro Rodríguez-Molina, Antonio Alarcón-Paredes, and Elías Ventura-Molina. Parkinson’s disease detection from voice recordings using associative memories. In *Healthcare*, volume 11, page 1601. MDPI, 2023.