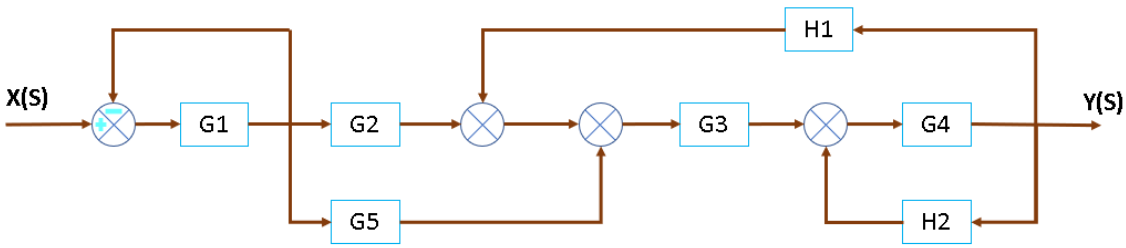
TEORÍA DE CONTROL Y ROBÓTICA

EJERCICIOS

REYES TAPIA N. IXE

PROFESOR: DR. DAVID TINOCO VARELA

Diagrama de bloques (Simplificación)



1. Para facilitar el análisis de este diagrama de bloques vamos a dividirlo en 3 secciones: Verde, rojo y naranja. Aquí podemos notar que en la sección **roja** tenemos un obstáculo que nos dificultará realizar mas simplificaciones mas adelante así que aplicaremos la regla **1** (Retroalimentación de los puntos de suma).

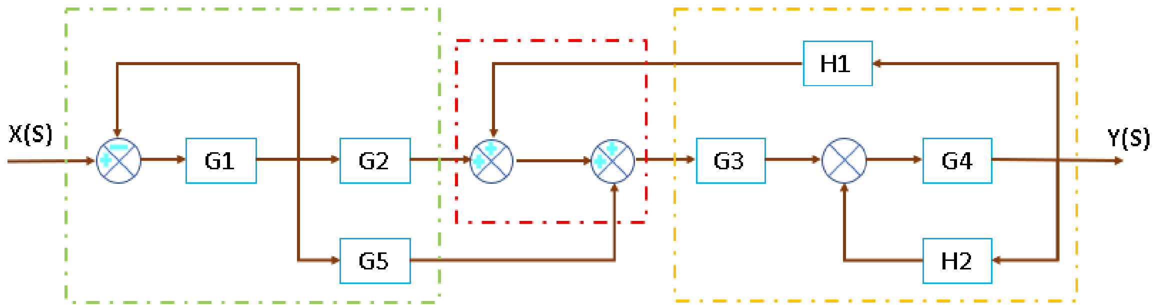
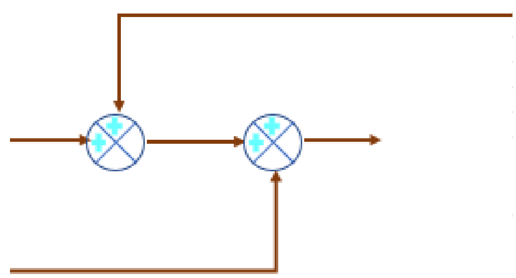
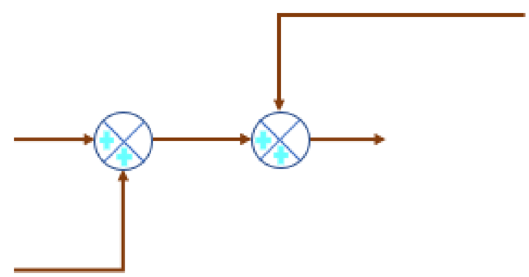
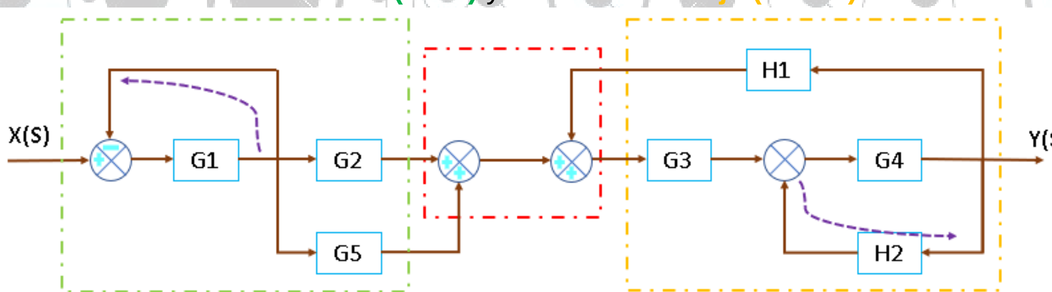
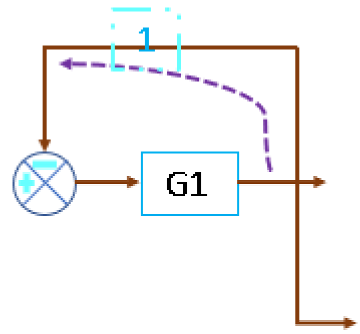
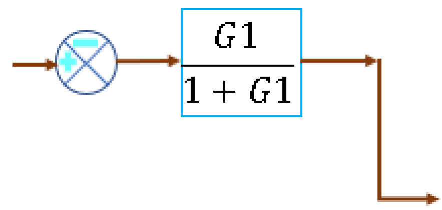


DIAGRAMA ORIGINAL	DIAGRAMA EQUIVALENTE
	

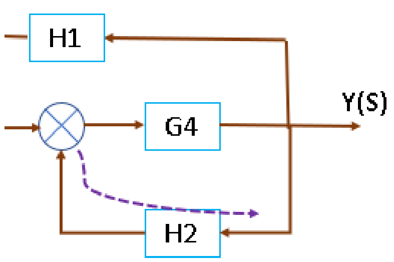
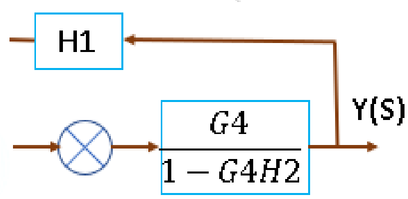
2. Identificamos las mallas de retroalimentación para utilizar la **regla 13.** Encontramos 2 mallas: una en la sección **verde (G1-1)** y otra en la **naranja (G4-H2)**



Malla de retroalimentación G1-1

DIAGRAMA ORIGINAL	DIAGRAMA EQUIVALENTE
Suponemos un **1** en la retroalimentación 	A esta parte del diagrama equivalente la llamaremos **A.** 

Malla de retroalimentación G4-H2

DIAGRAMA ORIGINAL	DIAGRAMA EQUIVALENTE
	 A este diagrama equivalente lo llamaremos **B.**

3. G3 y B se encuentra en serie así que utilizamos la regla de ***combinación de bloques en cascada, regla 4.***

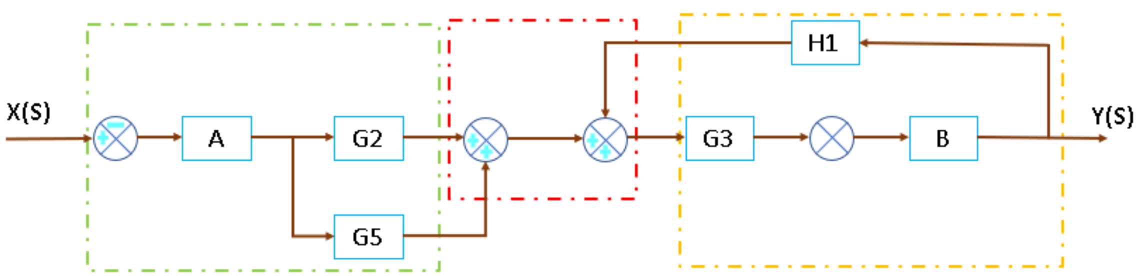
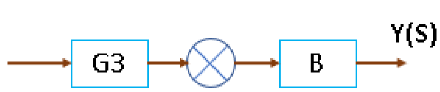
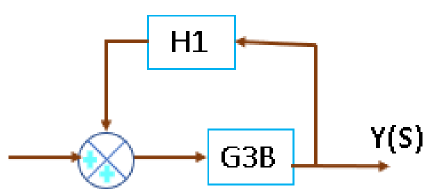


DIAGRAMA ORIGINAL	DIAGRAMA EQUIVALENTE
	

4. Una vez hecho el paso 4 resulta fácil utilizar la **regla 13** para H1-G3B.

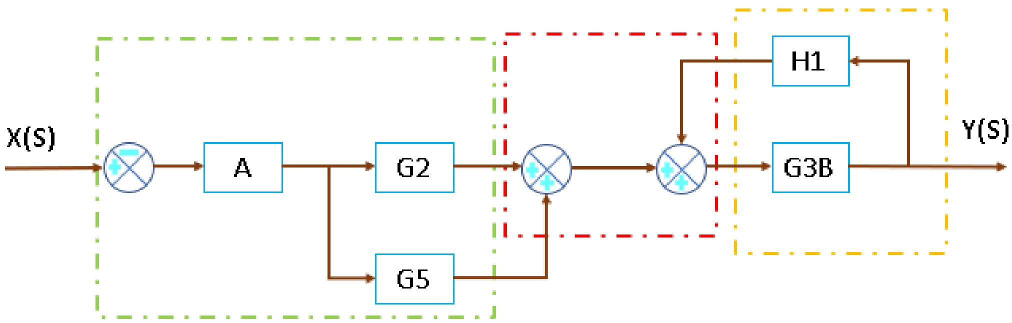
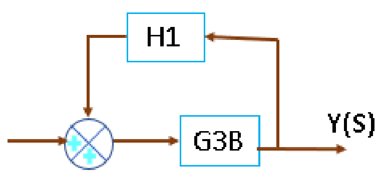
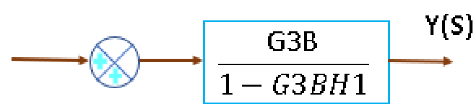


DIAGRAMA ORIGINAL	DIAGRAMA EQUIVALENTE
	 A este diagrama equivalente lo llamaremos **C,** simplificando así toda la sección **naranja**.

5. Teniendo a **G2** y **G2** en paralelo podemos utilizar la **regla 5** de combinación de bloques.

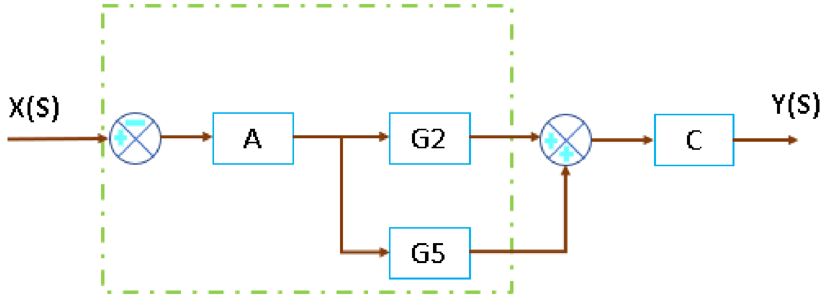
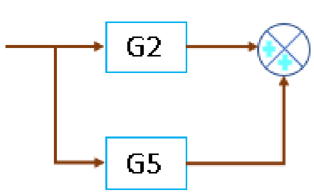
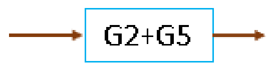
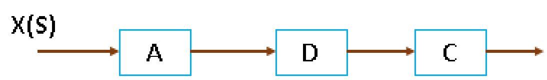


DIAGRAMA ORIGINAL	DIAGRAMA EQUIVALENTE
	 A este diagrama equivalente lo llamaremos **D,** simplificando así toda la sección **verde.**

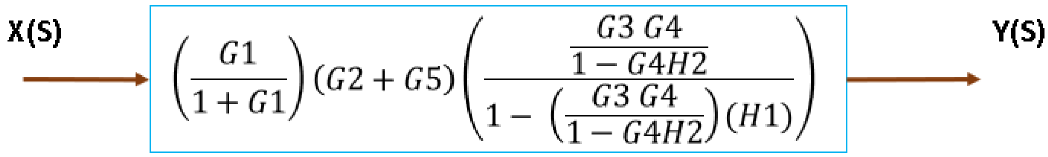
6. Teniendo solo 3 bloques (**A, D y C**) en serie utilizamos la **regla 5.**

DIAGRAMA ORIGINAL	DIAGRAMA EQUIVALENTE
	

$$A = \frac{G1}{1+G1}$$
$$B = \frac{G4}{1-G4H2}$$
$$C = \frac{G3B}{1-G3BH1}$$
$$D = G2 + G5$$
$$A * D * C = \left(\frac{G1}{1+G1}\right)(G2+G5)\left(\frac{G3B}{1-G3BH1}\right)$$

$$A * D * C = \left(\frac{G1}{1+G1}\right)(G2+G5)\left(\frac{\frac{G3\,G4}{1-G4H2}}{1-\frac{G3\,G4}{1-G4H2}H1}\right)$$

DIAGRAMA EQUIVALENTE



$$\left(\frac{G1}{1+G1}\right)(G2+G5)\left(\frac{\frac{G3\,G4}{1-G4H2}}{1-\left(\frac{G3\,G4}{1-G4H2}\right)(H1)}\right)$$

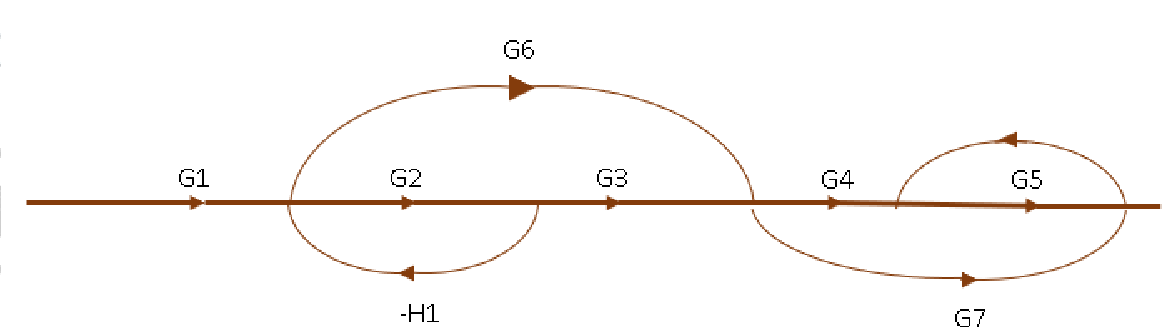
Reogramas (Obtener FT por Mason)

$$\frac{\Delta s}{\Delta i} = \frac{\sum Pk\,\Delta x}{\Delta} = \frac{P1\Delta 1 + P2\Delta 2 + \cdots + Pn\Delta n}{1-(L1+Ñ2+\cdots+Ln)+\sum LmLn-\sum LlLmLn+\cdots}$$

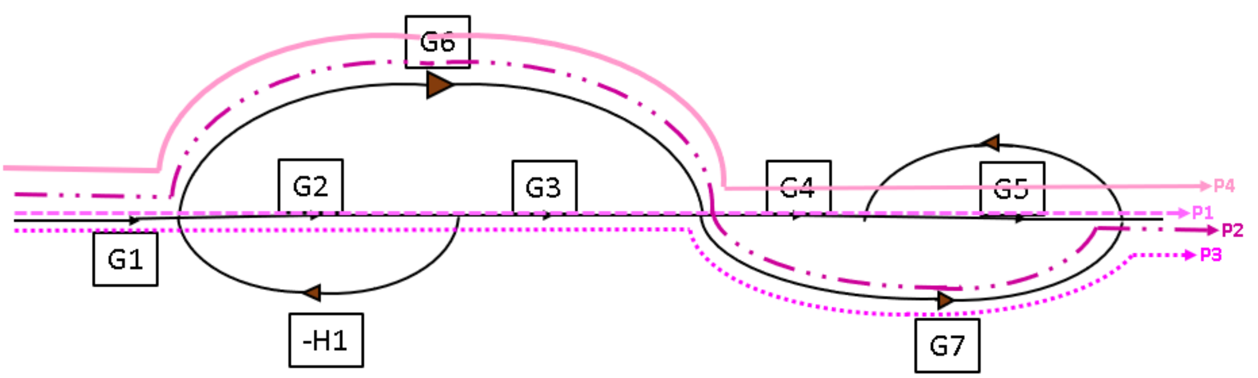
*Δ=1 – ($\sum$Todos los lazos) – ($\sum$Todos los productos de **pares** de lazos que **no se tocan entre si**) - ($\sum$Todos los productos de **tercias** de lazos que **no se tocan entre si**) + …*

Pk= camino directo k-ésimo

Δx= lo mismo que Δ, solo considerando los lazos que no tocan al camino Pk



1. Localizamos todos los caminos directos (**P_k**)



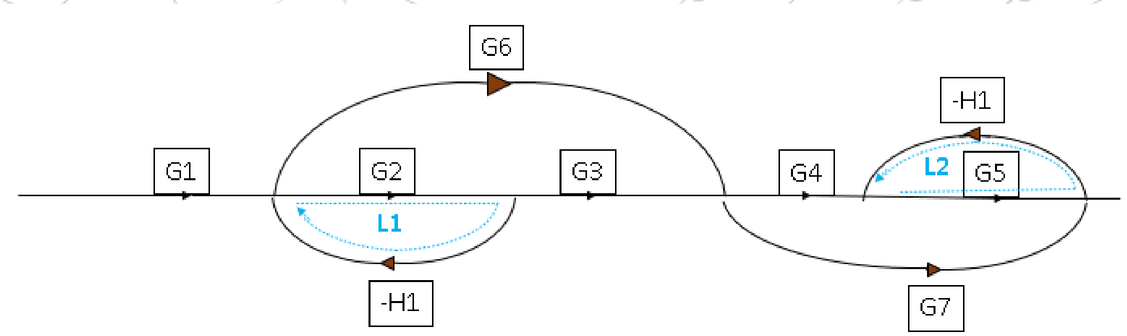
P1 = G1, G1, G2, G4, G5

P2 = G1, G6, G7

P3 = G1, G2, G3, G7

P4 = G1, G6, G4, G5

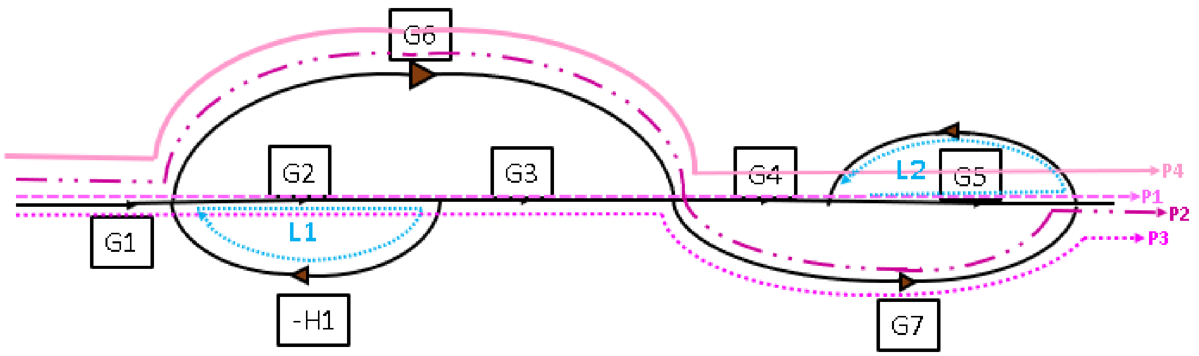
2. Identificamos todos los lazos (**L**)
   Lazo: inicia en un nodo, con el flujo normal y sin tocar todos los nodos regresa a su camino inicial. Ningún nodo se usa más de una vez)



L1 = -H1G2

L2 = -H2G5

3. Identificamos los Δk. La cantidad de Δk es igual a la cantidad de P_k que se obtuvieron en el paso 1.
   En el paso 1 obtuvimos 4P ∴ necesitamos 4 Δk



P1 = G1, G2, G3, G4, G5 $\quad \Delta 1 = 1 - \textbf{no existe lazo que no toque a } P1 \therefore \Delta 1 = 1$

P2 = G1, G6, G7 $\quad \Delta 2 = 1 - \textbf{No existe lazo que no toque } P2 \therefore \Delta 2 = 1$

P3 = G1, G2, G3, G7 $\quad \Delta 3 = 1 - \textbf{No existe lazo que no toque } P3 \therefore \Delta 3 = 1$

P4 = G1, G6, G4, G5 $\quad \Delta 4 = 1 - \textbf{No existe lazo que no toque } P4 \therefore \Delta 4 = 1$

4. Identificamos todos los lazos que se tocan o no entre sí.

   L1 y L2 NO se tocan entre sí

5. Sustituimos en la fórmula.

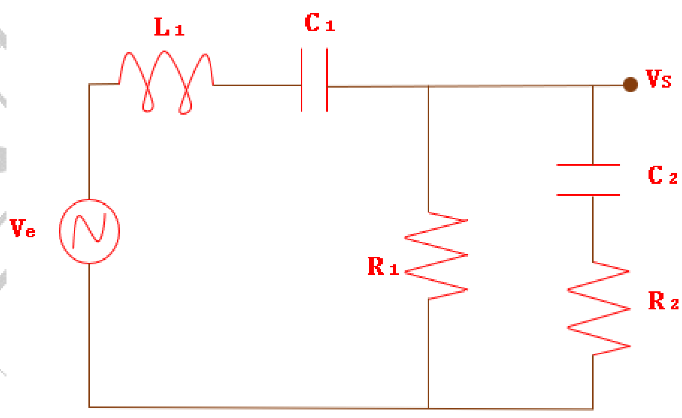
$$\Delta = 1 - \sum todos\ los\ lazos - \sum todos\ los\ lazos\ que\ no\ se\ tocan\ entre\ si$$

$$\Delta = 1 - (L1 + L2) + L1L2$$

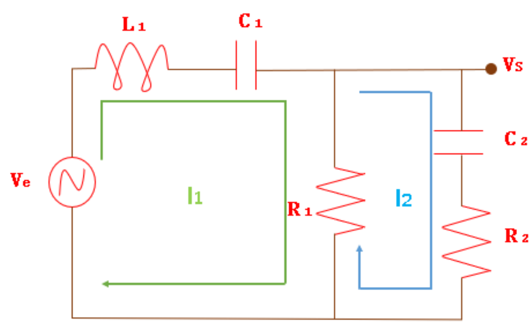
$$G = \frac{\sum Pk\ \Delta x}{\Delta} = \frac{P1(\Delta 1) + P2(\Delta 2) + P3(\Delta 3) + P4(\Delta 4)}{1 - (L1 + L2) + L1L2}$$

$$G = \frac{\sum Pk\ \Delta x}{\Delta} = \frac{G1G2G3G4G5(1) + G1G6G7(1) + G1G2G3G7(1) + G1G6G4G5(1)}{1 - (-H1G2 - H2G5) + (-H1G2)(-H2G5)}$$

$$\boxed{G = \frac{\sum Pk\ \Delta x}{\Delta} = \frac{G1G2G3G4G5 + G1G6G7 + G1G2G3G7 + G1G6G4G5}{1 - (-H1G2 - H2G5) + (-H1G2)(-H2G5)}}$$



1. Para este circuito utilizaremos el método de mallas de Kirchhoff que nos dice "en una malla la suma algebraica de todas las tensiones es igual a cero", es decir, la suma de las subidas de tensión debe ser igual a la suma de todas las caídas de tensión. Recordando que una malla es el camino cerrado que forman dos o más ramas de un circuito.
   En este circuito podemos notar que tenemos 2 mallas por donde circula dos corrientes que llamaremos I_1 y I_2



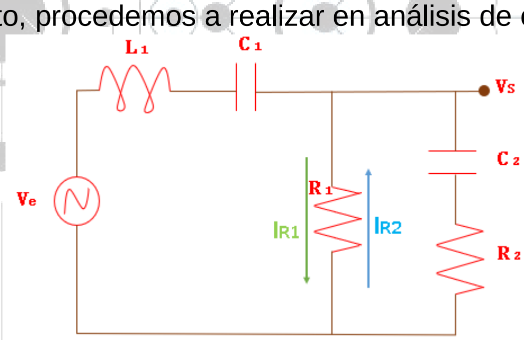
2. Podemos ver que tenemos 3 elementos diferentes: Resistencia, Capacitor e Inductor. Para calcular el voltaje en cada uno de estos elementos tenemos las siguientes fórmulas:

$$Resistencia \rightarrow V_R = RI$$

$$Capacitor \rightarrow V_C = \frac{1}{C}\int I\,dt$$

$$Inductor \rightarrow V_L = \frac{L(dI(t))}{dt}$$

3. Teniendo en cuenta esto, procedemos a realizar en análisis de cada malla



a. **Malla 1:**

$$V_e = V_{L1} + V_{C1} + V_{R1} - R_1 I_2$$

$$V_e = \frac{L_1(dI_1(t))}{dt} + \frac{1}{C_1}\int I_1\,dt + R_1 I_1 - R_1 I_2 \rightarrow \mathbf{3.1}$$

b. **Malla 2:**

$$0 = R_1 I_2 + V_{C1} + V_{R2} - V_{R1}$$

$$0 = R_1 I_2 + \frac{1}{C_2}\int I_2\,dt + R_2 I_2 - R_1 I_1 \rightarrow \mathbf{3.2}$$

4. Para calcular el valor de Vs establecemos una función de transferencia:

$$V_S = \frac{1}{C_2}\int I_2\,dt + R_2 I_2 \rightarrow \mathbf{3.3}$$

5. Aplicamos *Laplace* a las ecuaciones 3.1, 3.2 y 3.3
   a. **Ecuación 3.1**

$$V_e = L_1\mathcal{L}\left\{\frac{dI_1(t)}{dt}\right\} + \frac{1}{C_1}\mathcal{L}\left\{\int I_1\,dt\right\} + R_1\mathcal{L}\{I_1\} - R_1\mathcal{L}\{I_2\}$$

$$V_e = L_1 S I_1(S) + \frac{I_1(S)}{C_1(S)} + R_1 I_1(S) - R_1 I_2(S) \rightarrow \mathbf{5.1}$$

   b. **Ecuación 3.2**

$$0 = R_1\mathcal{L}\{I_2\} + \frac{1}{C_2}\mathcal{L}\left\{\int I_2\,dt\right\} + R_2\mathcal{L}\{I_2\} - R_1\mathcal{L}\{I_1\}$$

$$0 = R_1 I_2(S) + \frac{I_2(S)}{C_2(S)} + R_2 I_2(S) - R_1 I_1(S) \rightarrow \mathbf{5.2}$$

   c. **Ecuación 3.3**

$$V_S = \frac{1}{C_2}\mathcal{L}\left\{\int I_2\,dt\right\} + R_2\mathcal{L}\{I_2\}$$

$$V_S = \frac{I_2(S)}{C_2(S)} + R_2 I_2(S) \rightarrow \boldsymbol{F}$$

6. De las ecuaciones **5.1** factorizamos la corriente **I_1(S)** y de las ecuaciones, **5.2** y **5.3** factorizamos la corriente **I_2(S)**
   a. **Factorizando de 5.1**

$$V_e = I_1(S)\left[L_1 S + \frac{1}{C_1(S)} + R_1\right] - R_1 I_2(S) \rightarrow \mathbf{6.1}$$

   b. **Factorizando de 5.2**

$$0 = I_2(S)\left[R_1 + \frac{1}{C_2(S)} + R_1\right] - R_1 I_1(S) \rightarrow \mathbf{6.2}$$

$$Despejando\ I_1(S) \rightarrow I_1(S) = \frac{I_2(S)\left[R_1 + \frac{1}{C_2(S)} + R_2\right]}{R_1} = I_2(S)\frac{R_1C_2(S) + 1 + R_2C_2(S)}{R_1C_2(S)} \rightarrow \mathbf{6.2.1}$$

c. **Factorizando de 5.3**

$$V_S = I_2(S)\left[\frac{1}{C_2(S)} + R_2\right] \rightarrow \mathbf{6.3}$$

7. Sustituimos la **6.2.1** en **6.1**

$$I_1(S) = I_2(S)\frac{R_1C_2(S) + 1 + R_2C_2(S)}{R_1C_2(S)} \rightarrow \mathbf{6.2.1}$$

$$V_e = I_1(S)\left[L_1S + \frac{1}{C_1(S)} + R_1\right] - R_1I_2(S) \rightarrow \mathbf{6.1}$$

$$V_e = \left[I_2(S)\frac{R_1C_2(S) + 1 + R_2C_2(S)}{R_1C_2(S)}\right]\left[L_1S + \frac{1}{C_1(S)} + R_1\right] - R_1I_2(S)$$

$$= \left[I_2(S)\frac{R_1C_2(S) + 1 + R_2C_2(S)}{R_1C_2(S)}\right]\left[\frac{L_1SC_1(S) + 1 + R_1C_1(S)}{C_1(S)}\right] - R_1I_2(S) \rightarrow \mathbf{7.1}$$

8. Con la ecuación 7.1 y 6.3 obtendremos la *función de transferencia:*

Sabiendo que: $\Delta = \frac{Vs}{Ve}$

$$V_S = I_2(S)\left[\frac{1}{C_2(S)} + R_2\right] \rightarrow \mathbf{6.3}$$

$$V_e = \left[I_2(S)\frac{R_1C_2(S) + 1 + R_2C_2(S)}{R_1C_2(S)}\right]\left[\frac{L_1SC_1(S) + 1 + R_1C_1(S)}{C_1(S)}\right] - R_1I_2(S) \rightarrow \mathbf{7.1}$$

$$\Delta = \frac{Vs}{Ve} = \frac{\boldsymbol{I_2(S)}\left[\frac{1}{C_2(S)} + R_2\right]}{\left[\boldsymbol{I_2(S)}\frac{R_1C_2(S) + 1 + R_2C_2(S)}{R_1C_2(S)}\right]\left[\frac{L_1SC_1(S) + 1 + R_1C_1(S)}{C_1(S)}\right] - R_1}$$

$$Eliminando I_2(S) \rightarrow \ \Delta = \frac{\left[\frac{1}{C_2(S)} + R_2\right]}{\left[\frac{R_1C_2(S) + 1 + R_2C_2(S)}{R_1C_2(S)}\right]\left[\frac{L_1SC_1(S) + 1 + R_1C_1(S)}{C_1(S)}\right] - R_1}$$

$$Simplificamos\ en\ el\ denominador\ y\ numerador$$

$$\Delta = \frac{\left[\frac{1 + R_2C_2(S)}{C_2(S)}\right]}{\left[\frac{[R_1C_2(S) + 1 + R_2C_2(S)][L_1SC_1(S) + 1 + R_1C_1(S)]}{R_1C_2(S)C_1(S)}\right] - R_1}$$

$$\Delta = \frac{\left[\frac{1 + R_2C_2(S)}{C_2(S)}\right]}{\left[\frac{[R_1C_2(S) + 1 + R_2C_2(S)][L_1SC_1(S) + 1 + R_1C_1(S)] - R_1[R_1C_2(S)C_1(S)]}{R_1C_2(S)C_1(S)}\right]}$$

$$Solo\ queda\ simplificar\ la\ ecuación. Utilizaremos\ la\ ley\ del\ sándwich\ para\ esto$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

$$\boxed{\Delta = \frac{[R_1 C_2(S) C_1(S)][1 + R_2 C_2(S)]}{\{[R_1 C_2(S) + 1 + R_2 C_2(S)][L_1 S C_1(S) + 1 + R_1 C_1(S)] - R_1[R_1 C_2(S) C_1(S)]\}\{C_2(S)\}}}$$