UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLÁN

INGENIERÍA MECÁNICA ELÉCTRICA

Teoría de Control y Robótica

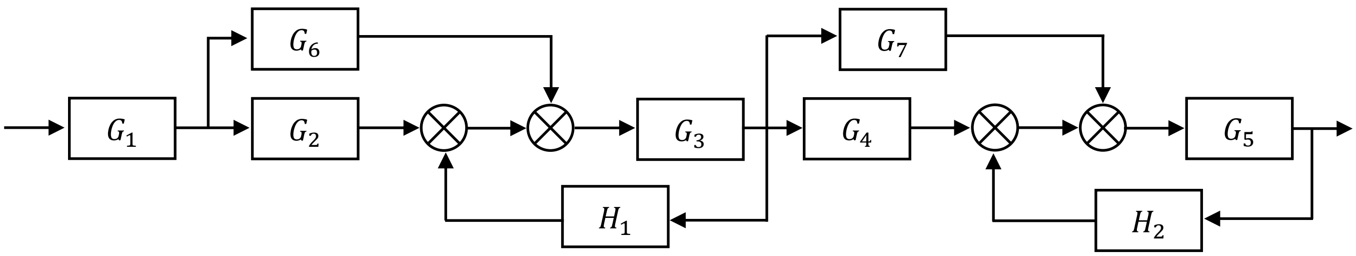
PROYECTO FINAL

DOCENTE
Dr. David Tinoco Varela

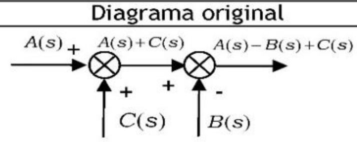
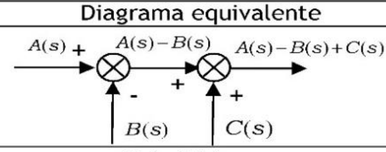
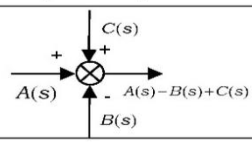
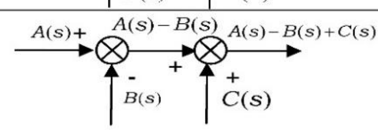
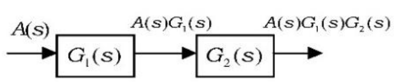
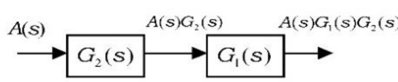
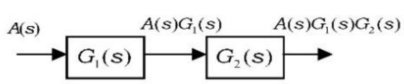
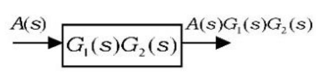
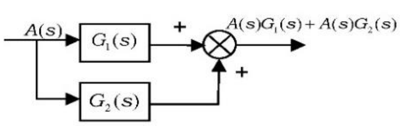
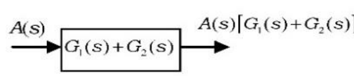
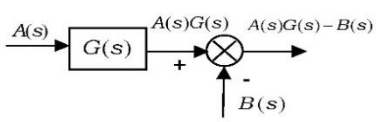
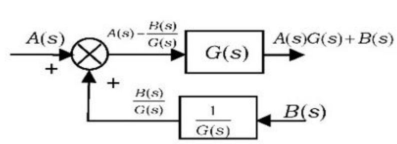
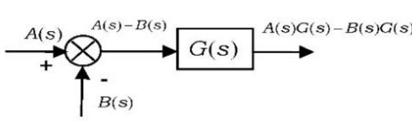
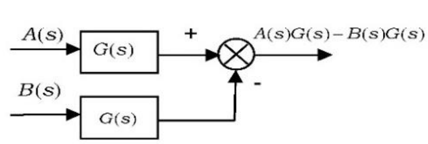
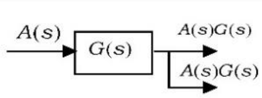
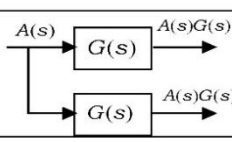
INTEGRANTES
Moisés Horacio Córdova Hernández
José de Jesús Sánchez Pérez

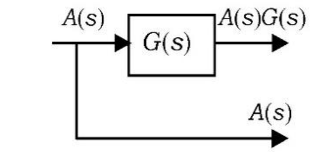
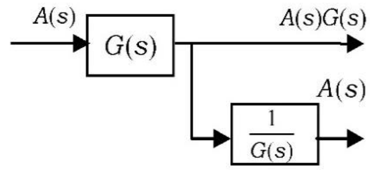
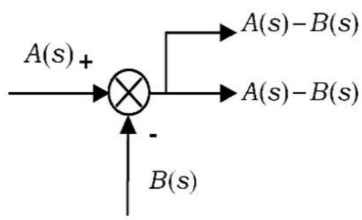
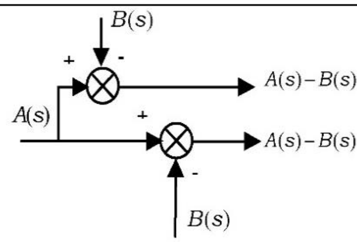
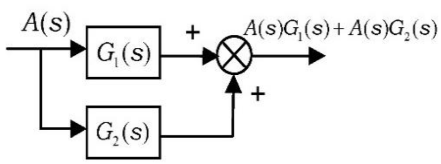
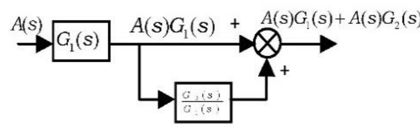
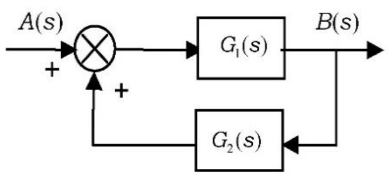
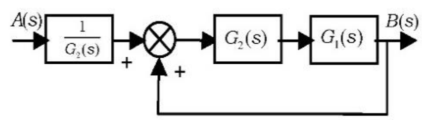
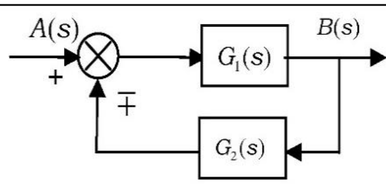
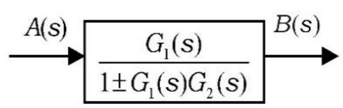
ÍNDICE

DIAGRAMA DE BLOQUES

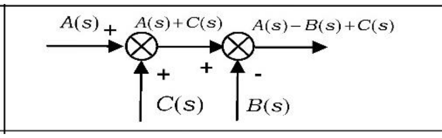
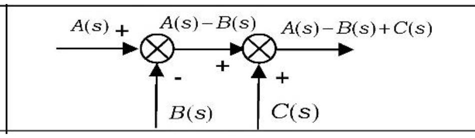


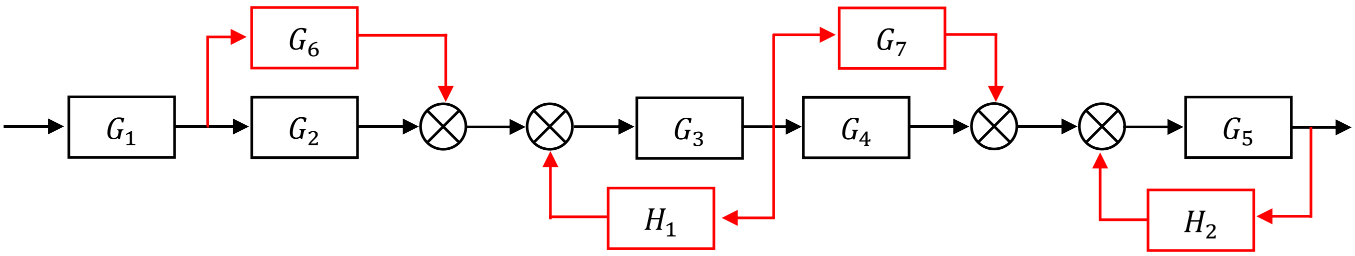
Para este ejercicio usaremos las siguientes reglas de bloques:

Regla	Diagrama original	Diagrama equivalente	Nombre
1			Reordenamiento de los puntos de suma.
2			Reordenamiento de los puntos de suma.
3			Reordenación de bloques en cascada.
4			Combinación de bloques en cascada.
5			Combinación de bloques en paralelo.
6			Movimiento de un punto de suma adelante de un bloque.
7			Movimiento de un punto de suma mas allá de un bloque.
8			Movimiento de un punto de toma adelante de un bloque.

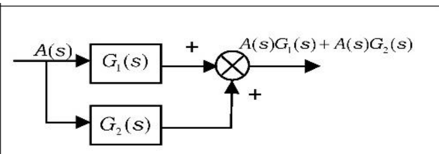
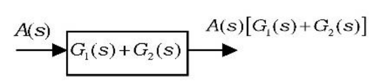
Regla	Diagrama original	Diagrama equivalente	Nombre
9			Movimiento de un punto de toma más allá de un bloque
10			Movimiento de un punto de un punto adelante de un punto de suma
11			Remoción de un bloque de una trayectoria directa
12			Remoción de un bloque en una malla de retroalimen-tación
13			Eliminación de una malla de retro-alimentación

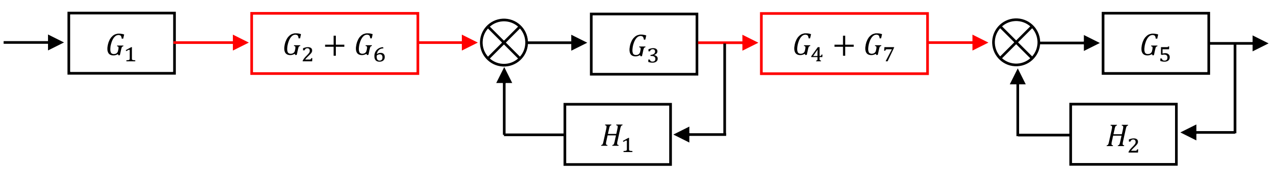
1. Reordenamos los puntos de suma con la regla 1 y se separan los nodos.

1			Reordenamiento de los puntos de suma.

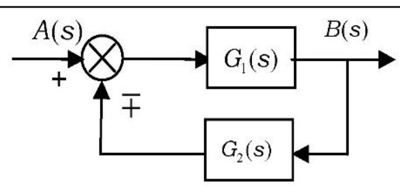
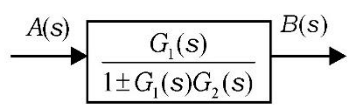


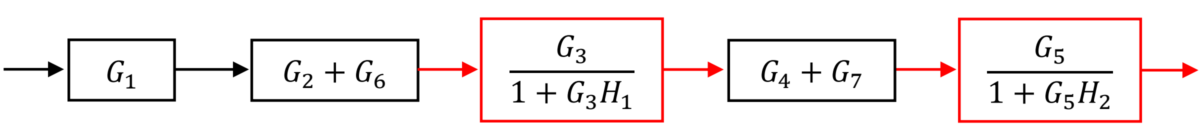
2. Combinamos bloques en paralelo con el flujo en la misma dirección, utilizando la regla 5.

5			Combinación de bloques en paralelo.



3. Eliminamos mallas de retroalimentación con flujos en dirección opuesta con la regla 13.

13			Eliminación de una malla de retro-alimentación



4. Combinación de bloques en cascadas utilizando la regla 4, esto es como hacer una multiplicación en algebra.

4	$\xrightarrow{A(s)} \boxed{G_1(s)} \xrightarrow{A(s)G_1(s)} \boxed{G_2(s)} \xrightarrow{A(s)G_1(s)G_2(s)}$	$\xrightarrow{A(s)} \boxed{G_1(s)G_2(s)} \xrightarrow{A(s)G_1(s)G_2(s)}$	Combinación de bloques en cascada.

4.1

$$\longrightarrow \boxed{G_1} \longrightarrow \boxed{G_2+G_6} \longrightarrow \boxed{\frac{G_3}{1+G_3H_1}} \longrightarrow \boxed{\frac{G_5(G_4+G_7)}{1+G_5H_2}} \longrightarrow$$

4.2

$$\longrightarrow \boxed{G_1} \longrightarrow \boxed{G_2+G_6} \longrightarrow \boxed{\frac{G_3G_5(G_4+G_7)}{(1+G_3H_1)(1+G_5H_2)}} \longrightarrow$$

4.3

$$\longrightarrow \boxed{G_1} \longrightarrow \boxed{\frac{G_3G_5(G_4+G_7)(G_2+G_6)}{(1+G_3H_1)(1+G_5H_2)}} \longrightarrow$$

4.4

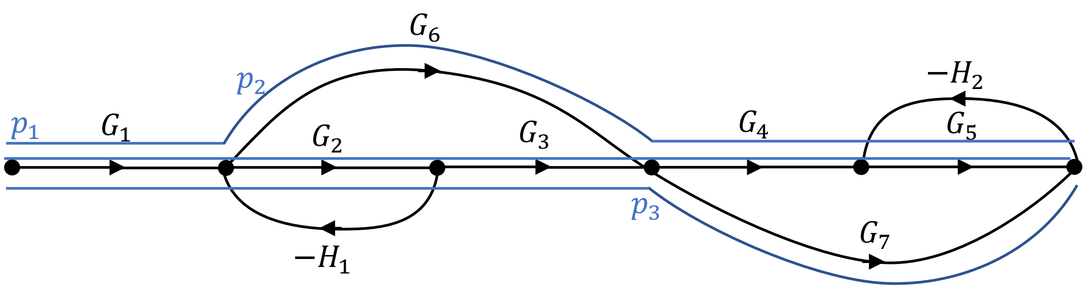
$$\longrightarrow \boxed{\frac{G_1G_3G_5(G_4+G_7)(G_2+G_6)}{(1+G_3H_1)(1+G_5H_2)}} \longrightarrow$$

REOGRAMAS POR MASÓN

En este ejercicio nos basaremos en las reglas dadas en clase.

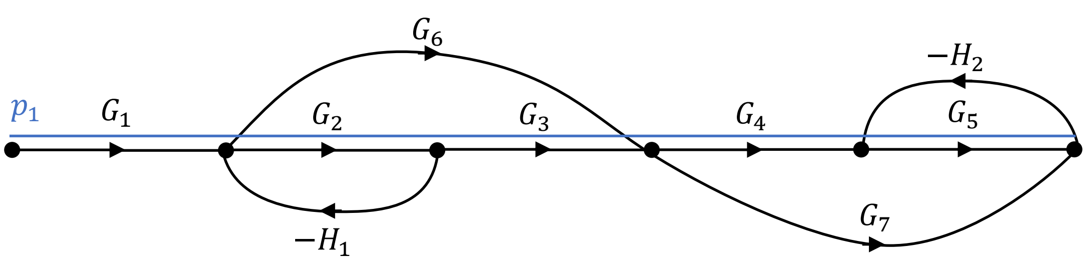
$$\frac{\Delta_s}{\Delta_i} = \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}$$

$$\Delta = 1 - \left(\sum \text{Todos los lazos}\right) + \left(\sum \text{Todos los productos de pares de lazos que no se tocan entre si}\right) - \left(\sum \text{Todos los productos tercios de lazos que no se tocan entre si}\right) + \cdots$$

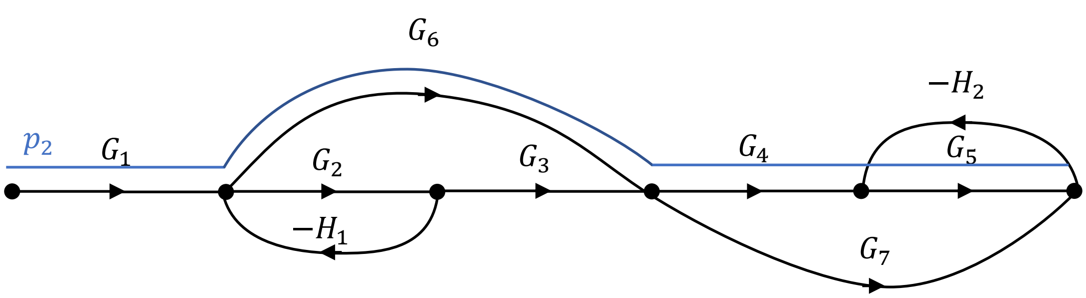


1. Obtenemos los caminos posibles por los cuales podemos llegar al final del reograma, los cuales llamaremos P, donde iremos agregando las ganancias del camino en forma de producto.

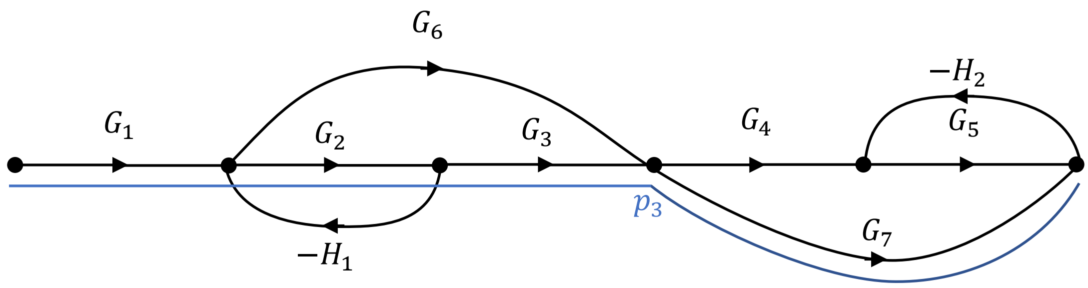
$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$$



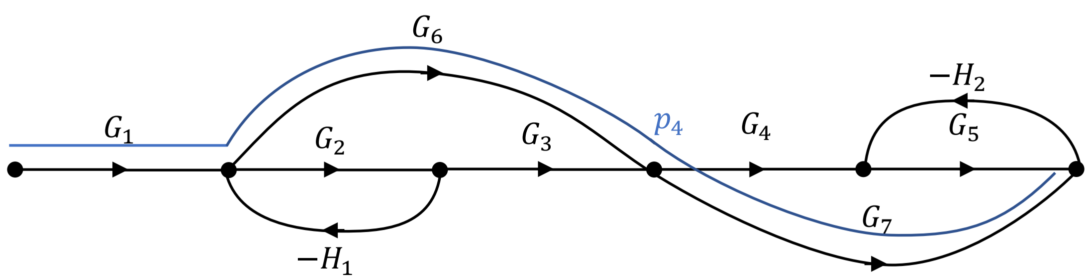
$$P_2 = G_1 G_6 G_4 G_5$$



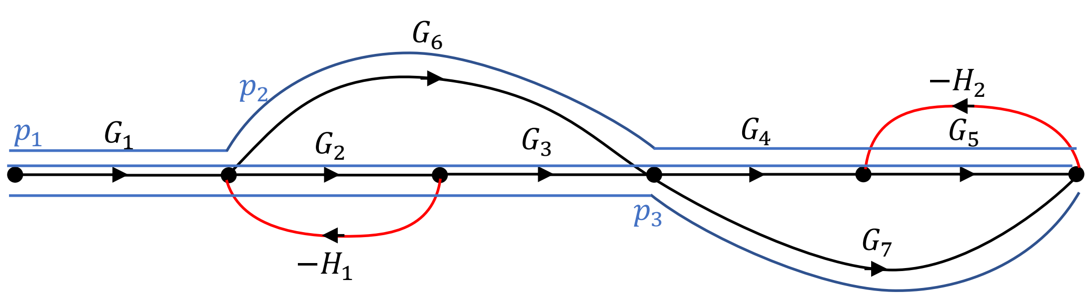
$P_3 = G_1G_2G_3G_7$



$P_4 = G_1G_6G_7$



2. Determinamos los lazos que existen en el reograma, estos se definen por las retro alimentaciones, esto quiere decir que son caminos cerrados dentro de las reograma. Lo podemos agrupar según las reglas de clase.



Lazos existentes
$L_1 = -H_1G_2$
$L_2 = -H_2G_5$

Pares de lazos que no se tocan entre si
$L_1\ L_2$

3. Obtenemos la Δk de los caminos posibles utilizando las reglas anteriores y revisando los caminos obtenidos.

$\Delta_1 = 1$
$\Delta_2 = 1$
$\Delta_3 = 1$
$\Delta_4 = 1$

4. Procedemos a construir la formulas y los valores obtenidos.

$$G = \frac{p_1\Delta_1 + p_2\Delta_2 + p_3\Delta_3 + p_4\Delta_4}{1 - (L_1 + L_2) + (L_1 L_2)}$$

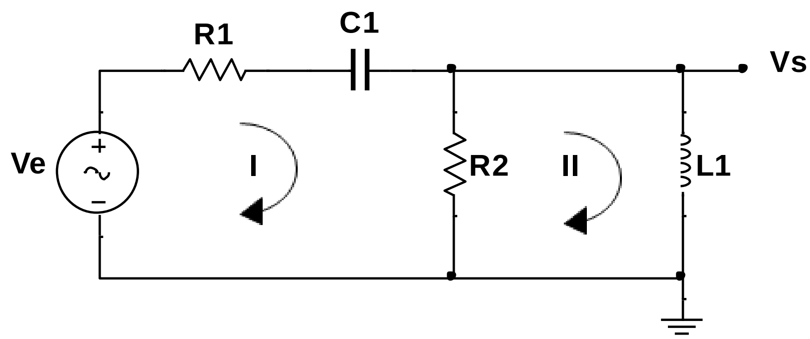
Sustituir

$$G = \frac{(G_1G_2G_3G_4G_5)(1) + (G_1G_6G_4G_5)(1) + (G_1G_2G_3G_7)(1) + (G_1G_6G_7)(1)}{1 - (-H_1G_2 - H_2G_5) + \big((-H_1G_2)(-H_2G_5)\big)}$$

5. Simplificando resultado

$$G = \frac{(G_1G_2G_3G_4G_5) + (G_1G_6G_4G_5) + (G_1G_2G_3G_7) + (G_1G_6G_7)}{1 + H_1G_2 + H_2G_5 + H_1G_2H_2G_5}$$

MODELADO DE SISTEMAS



Donde:
i_1 = Malla I
i_2 = Malla II

Para este ejercicio determinaremos la función de transferencia utilizando leyes de mallas de Kirchhoff y transformada de Laplace, al igual que conceptos básicos de cálculo y Algebra

1. Obtener funciones de voltaje de entrada y salida por Ley de corriente de Kirchhoff (Existen dos corrientes en el circuito I_1 e I_2.

Para la 1° malla

$$V_e = V_{R1} + V_{C1} + V_{R2} \tag{1}$$

Formulas

$$V_i = R_1 i_1(t) + \frac{1}{C_1}\int i_1(t)dt + R_2 i_1(t) - R_2 i_2(t) \ldots (2) \tag{2}$$

Hay que recordar que los componentes que tocan 2 corrientes se suman y restan según el análisis de malla correspondiente, como en la resistencia 2.

Para la 2° malla (No hay fuente de voltaje)

$$0 = V_{L1} + V_{R2} \tag{3}$$

$$0 = \mathcal{L}_1 \frac{d}{dt} i_2(t) + R_2 i_2(t) - R_2 i_1(t) \tag{4}$$

Voltaje de salida

$$V_s = V_{L1} \tag{5}$$

$$V_s = \mathcal{L}_1 \frac{d}{dt} i_2(t) \tag{6}$$

2. Aplicar Laplace
Utilizando las fórmulas correspondientes para cada componente

$$\mathcal{L}\{V_i\} = \mathcal{L}\left\{R_1 i_1(t) + \frac{1}{C_1}\int i_1(t)dt + R_2 i_1(t) - R_2 i_2(t)\right\} \tag{7}$$

$$0 = \mathcal{L}\left\{\mathcal{L}_1 \frac{d}{dt} i_2(t) + R_2 i_2(t) - R_2 i_1(t)\right\} \tag{8}$$

$$V_s = \left\{\mathcal{L}_1 \frac{d}{dt} i_2(t)\right\} \tag{9}$$

Transformadas:

$$V_1 = R_1 I_1(s) + \frac{1}{c_1 s} I_1(s) + R_2 I_1(s) - R_2 I_2(s) \tag{10}$$

$$0 = \mathcal{L}_1 s I_2(s) + R_2 I_2(s) - R_2 I_1(s) \tag{11}$$

$$V_s(s) = \mathcal{L}_1(s) I_2(s) \tag{12}$$

3. Factorizar $I_1(s)$ e $I_2(s)$ de las funciones.

$$V_1(s) = I_1(s)\left(R_1 + \frac{1}{c_1 s} + R_2\right) - I_2(s)(R_2) \tag{13}$$

$$0 = -I_1(s)(R_2) + I_2(s)(\mathcal{L}_1 s + R_2) \tag{14}$$

$$V_s(s) = I_2(s)(\mathcal{L}_1 s) \tag{15}$$

4. Despejando $I_1(s)$ de la ecuación (16)

$$0 = -I_1(s)R_2 + I_2(s)(\mathcal{L}_1 s + R_2) \tag{16}$$

$$R_2 I_1(s) = I_2(s)(\mathcal{L}_1 s + R_2) \tag{17}$$

$$I_1(S) = \frac{I_2(s)(\mathcal{L}_1 s + R_2)}{R_2} \tag{18}$$

5. Sustituimos la ecuación (13)

$$V_1(s) = \left(\frac{I_2(s)(\mathcal{L}_1 s + R_2)}{R_2}\right)\left(R_1 + \frac{1}{c_1 s} + R_2\right) - I_2(s)(R_2) \tag{19}$$

Reordenamos y realizamos productos

$$V_i(s) = I_2(s)\left[\frac{(\mathcal{L}_1 s + R_2)\left(R_1 + \frac{1}{c_1 s} + R_2\right) - R_2^2}{R_2}\right] \tag{20}$$

6. Sustituir $\Delta = {}^{U_s}/_{U_i}$ con los valores obtenidos.

$$\Delta = \frac{U_s}{U_i} = \frac{I_2(s)(\mathcal{L}_1 s)}{I_2(s)\left[\frac{(\mathcal{L}_1 s + R_2)\left(R_1 + \frac{1}{c_1 s} + R_2\right) - R_2^2}{R_2}\right]} \tag{21}$$

Se eliminan términos comunes

$$\Delta = \frac{U_s}{U_i} = \frac{(\mathcal{L}_1 s)}{\left[\frac{(\mathcal{L}_1 s + R_2)\left(R_1 + \frac{1}{c_1 s} + R_2\right) - R_2^2}{R_2}\right]} \tag{22}$$

Ley del sándwich.

$$\Delta = \frac{U_s}{U_i} = \frac{R_2(\mathcal{L}_1 s)}{\left[(\mathcal{L}_1 s + R_2)\left(R_1 + \frac{1}{c_1 s} + R_2\right) - R_2^2\right]} \tag{23}$$

Resolviendo productos

$$\Delta = \frac{U_s}{U_i} = \frac{R_2(\mathcal{L}_1 s)}{\left[R_1\mathcal{L}_1 s + \frac{\mathcal{L}_1 s}{c_1 s} + R_2\mathcal{L}_1 s + R_2R_1 + \frac{R_2}{c_1 s} + {R_2}^2 - R_2^2\right]} \tag{24}$$

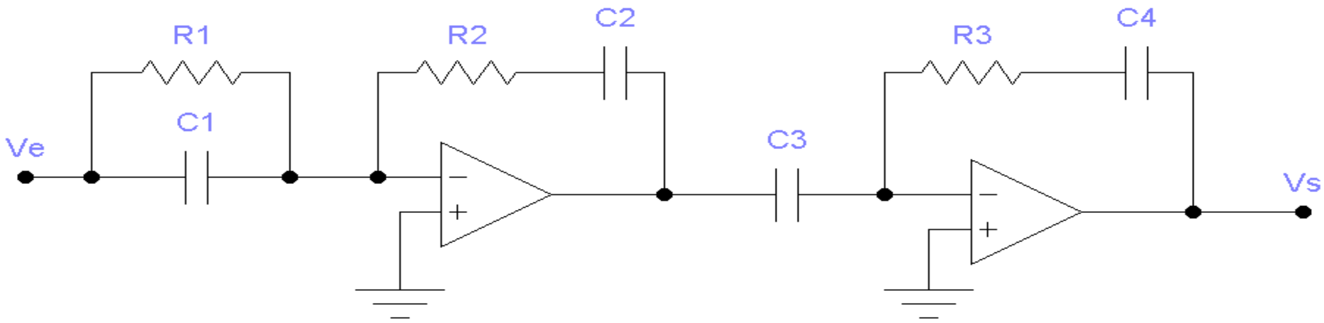
$$\Delta = \frac{U_s}{U_i} = \frac{R_2(\mathcal{L}_1 s)}{\left[R_1\mathcal{L}_1 s + \frac{\mathcal{L}_1 s}{c_1 s} + R_2\mathcal{L}_1 s + R_2R_1 + \frac{R_2}{c_1 s}\right]} \tag{25}$$

Todo por $c_1 s$.

$$\Delta = \frac{U_s}{U_i} = \frac{R_2 c_1 \mathcal{L}_1 s^2}{[c_1 R_1 \mathcal{L}_1 s^2 + \mathcal{L}_1 s + c_1 R_2 \mathcal{L}_1 s^2 + c_1 R_2 R_1 s + R_2]} \tag{26}$$

FT DE AMPLIFICADOR OPERACIONAL

Determinar Ft del circuito

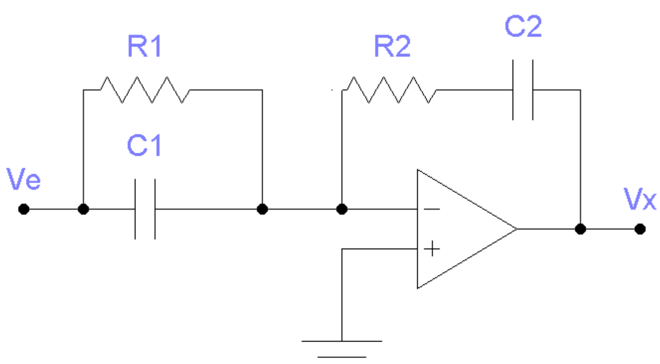


Para este ejercicio utilizaremos transformada Laplace y Leyes de corriente en mallas más conocimientos previos de amplificaciones operacionales.

1. Plantear formula de transferencia por fases.

$$\Delta = \frac{V_s}{V_e} = \frac{V_s}{V_x} \cdot \frac{V_x}{V_e}$$

2. Obtener fase ${}^{V_x}/_{V_e}$ de la primera fase



$$i_A = 0 \qquad V_n = V_p$$

$$i_1 + i_2 - i_n = 0$$

$$i_1 + i_2 = 0$$

El paralelo de R1 con C_1 y R2 con C2 en serie se transforma a Laplace y se resuelve como paralelo y serie de resistencias respectivamente.

$$Z_1 = \frac{\frac{R_1}{C_1 s}}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}} = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1}$$

$$Z_2 = \frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s}$$

Se suman las corrientes y se sustituyen por los valores.

$$i_1 + i_2 = 0$$

$$\frac{V_e - V_n}{Z_1} + \frac{V_n - V_x}{Z_2} = 0 \qquad \text{Recordando } i = \frac{V}{R}$$

El voltaje en el amplificador operacional de la entrada inversora es igual a cero.

$$V_n = 0$$

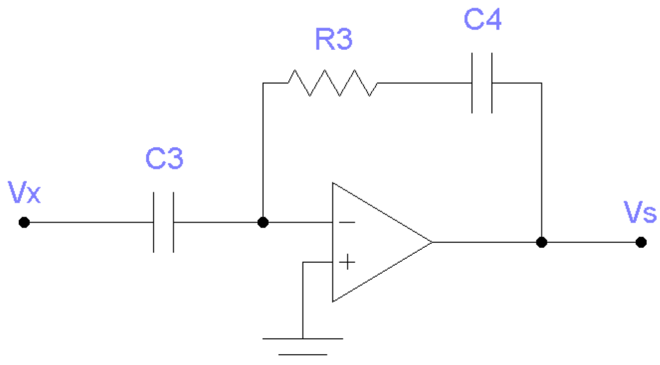
$$\frac{V_e}{Z_1} = -\frac{V_x}{Z_2}$$

Resolviendo $\frac{V_x}{V_e}$

$$\frac{V_x}{V_e} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\frac{R_2C_2s+1}{C_2s}}{\frac{R_1}{R_1C_1s+1}}$$

$$\frac{V_x}{V_e} = \frac{(R_2C_2s+1)(R_1C_1s+1)}{R_1C_2s}$$

3. Obtener fase $^{V_s}/_{V_x}$ con el mismo procedimiento de $^{V_x}/_{V_e}$



$$i_1 + i_2 - i_A = 0$$

$$i_1 + i_2 = 0$$

$$Z_3 = R_3 + \frac{1}{C_4s} = \frac{R_3C_4s+1}{C_4s}$$

$i_1 + i_2 = 0$ $\qquad$ $\frac{V_x - V_v}{C_3} = \frac{V_n - V_s}{Z_3}$

$$\frac{V_x}{\frac{1}{C_3s}} = -\frac{V_s}{Z_3}$$

Resolviendo $\frac{V_s}{V_x}$

$$\frac{V_s}{V_x} = \frac{\frac{R_3C_4s+1}{C_4s}}{\frac{1}{C_3s}} = \frac{C_3R_3C_4s^2+1}{C_4s}$$

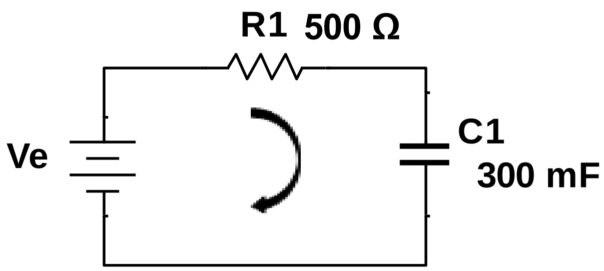
4. Resolviendo Δ utilizando algebra.

$$\Delta = \frac{V_s}{V_i} = \frac{V_s}{V_x} \cdot \frac{V_x}{V_e}$$

$$\Delta = \frac{V_s}{V_i} = \frac{C_3R_3C_4s^2+1}{C_4s} \cdot \frac{(R_2C_2s+1)(R_1C_1s+1)}{R_1C_2s}$$

$$\Delta = \frac{V_s}{V_i} = \frac{(R_2C_2s+1)(R_1C_1s+1)(C_3R_3C_4s^2+1)}{(C_4s)(R_1C_2s)}$$

SISTEMA 1° ORDEN RESPUESTA EN EL TIEMPO



$V_x - V_R - V_c = 0$

$V_x - Ri_1 - V_c\ (t) = 0$

$V_x - RC\,\frac{dV(t)}{dt} - V_c(t) = 0$

1. Aplicando Laplace

$$V_x\mathcal{L}\{7\} - RC\mathcal{L}\left\{\frac{dV_C(t)}{dt}\right\} - \mathcal{L}\{V_c(t)\} = 0$$

$$\frac{V_x}{s} - RC\big(sV_c(s) - V_c(0)\big) - V_c(s) = 0$$

2. Resolviendo el producto

$$\frac{V_x}{s} - RCsV_c(s) + RCV_c(0) - V_c(s) = 0$$

3. Factorizando y despejando $V_c(s)$

$$\frac{V_x}{s} - V_c(s)(R_cs + 1) + RCV_c(0) = 0$$

$$V_c(s) = \frac{\frac{V_x}{s} + R_cV_c(0)}{(RCs + 1)} = \frac{\frac{V_x + RCsV_c(0)}{s}}{RCs + 1}$$

$$V_c(s) = \frac{V_x + RCV_c(0)s}{(RCs + 1)s}$$

4. Sustituir valores

$$V_c(s) = \frac{9 + (500)(300\mu)(1.8)s}{\left[\big((500)(300\mu)s + 1\big)s\right]}$$

$$V_c(s) = \frac{9 + 0.27s}{(0.15s + 1)s}$$

5. Dividir todo entre 0.15 para normalizar s

$$V_c(s) = \frac{60 + 1.8s}{(s + 6.66)s}$$

6. Separando numerador

$$V_c(s) = \frac{60}{(s + 6.66)s} + \frac{1.8s}{(s + 6.66)s}$$

7. Descomponiendo primer termino

$$\frac{60}{(s + 6.66)s} = \frac{A}{s + 6.66} + \frac{B}{s}$$

$$A = \left|(s + 6.66)\left(\frac{60}{(s + 6.66)s}\right)\right|_{s=-6.66} = -9$$

$$B = \left|(s)\left(\frac{60}{(s + 6.66)s}\right)\right|_{s=0} = 9$$

8. Sustituyendo A y B en ecuación de $V_c(s)$

$$v_c(s) = \frac{-9}{s + 6.66} + \frac{9}{s} + \frac{1.8}{s + 6.66}$$

9. Simplificando

$$V_c(s) = \frac{-7.2}{s + 6.66} + \frac{9}{s}$$

10. Aplicar $\mathrm{Laplace}^{-1}\,(\mathcal{L}^{-1})$

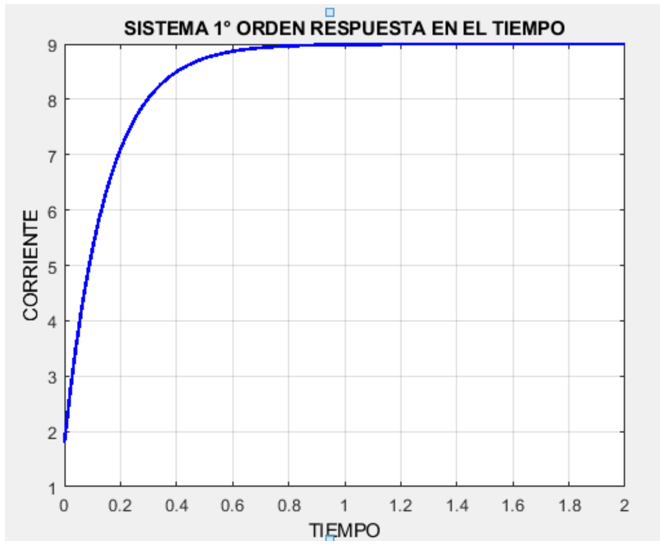
$$V_c(s) = -7.2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+6.66}\right\} + 9\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

$$V_c(s) = -7.2e^{-6.66t} + 9$$

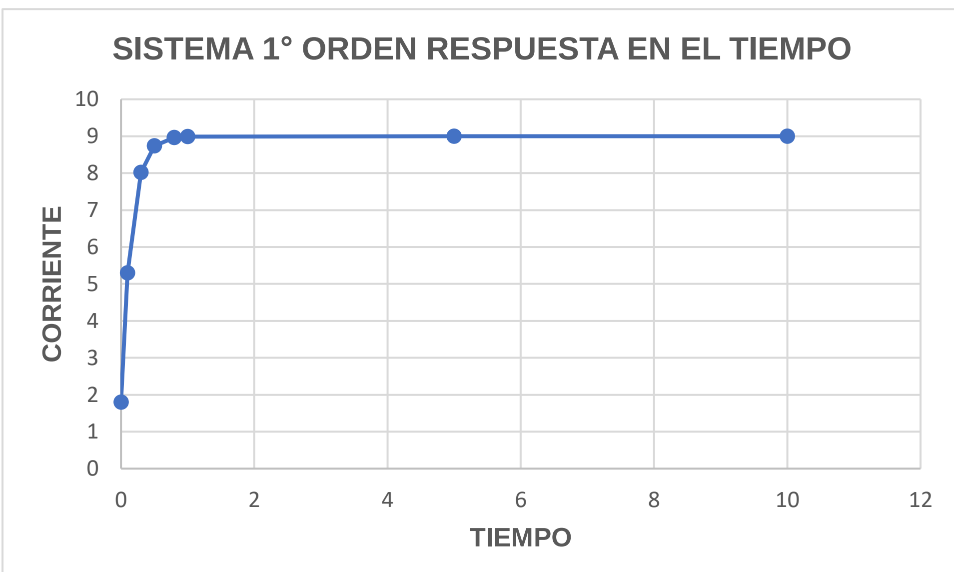
11. Graficando por medio Matlab

```
Código utilizado para la realización de la
gráfica de respuesta

t= linspace (0,2,100);
Vc= 9-7.2*exp(-6.66*t);
plot(t,Vc);
title("SISTEMA 1° ORDEN RESPUESTA EN EL
TIEMPO");
xlabel("TIEMPO");
ylabel("CORRIENTE");
grid;
```



12. Graficando por medio de Excel



TRANSFORMADA DE LAPLACE $\mathscr{L}$

Definiciones integrales

Transformada de Laplace	Transformada inversa de Laplace
$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} \equiv \lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}f(t)\,dt$ s es en realidad una variable compleja pero se trata como constante durante la integración	$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \lim\limits_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} e^{st}F(s)\,ds$ σ es un número real elegido de tal forma que todos los polos de $F(s)$ queden a la izquierda de la recta vertical que pasa por σ

Tabla de transformadas

	$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t^n n es un entero positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3	$\sqrt{t}$	$\sqrt{\frac{\pi}{4s^3}}$
4	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
5	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
6	$t^n e^{at}$ n es un entero positivo	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
7	$\operatorname{sen} kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
8	$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
9	$\operatorname{senh} kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
10	$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$
11	$e^{at}\operatorname{sen} kt$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$
12	$e^{at}\cos kt$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+k^2}$
13	$t\operatorname{sen} kt$	$\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$
14	$t\cos kt$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$
15	$\operatorname{sen} kt - kt\cos kt$	$\frac{2k^3}{(s^2+k^2)^2}$
16	$\operatorname{sen} kt + kt\cos kt$	$\frac{2ks^2}{(s^2+k^2)^2}$

	$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}$
17	$\operatorname{senh} kt - \operatorname{sen} kt$	$\frac{2k^3}{s^4-k^4}$
18	$\cosh kt - \cos kt$	$\frac{2k^2 s}{s^4-k^4}$
19	$1-\cos kt$	$\frac{k^2}{s(s^2+k^2)}$
20	$kt - \operatorname{sen} kt$	$\frac{k^3}{s^2(s^2+k^2)}$
21	$\frac{a\operatorname{sen} bt - b\operatorname{sen} at}{ab(a^2-b^2)}$	$\frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
22	$\frac{\cos bt - \cos at}{a^2-b^2}$	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
23	$\ln t$	$-\frac{\gamma+\ln s}{s}$ γ es la constante de Euler $(\gamma = 0.5772156\ldots)$
24	$\ln^2 t$	$\frac{\pi}{6s}+\frac{(\gamma+\ln s)^2}{s}$
25	$-(\gamma+\ln t)$	$\frac{\ln s}{s}$
26	$(\gamma+\ln t)^2-\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\ln^2 s}{s}$
27	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$	$\ln\left(\frac{s+b}{s+a}\right)$
28	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{\sqrt{4\pi t^3}}$	$\sqrt{s+b}-\sqrt{s+a}$
29	$\frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}}e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$
30	$\operatorname{erf}(t)$	$\frac{e^{s^2/4}}{s}\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}s\right)\right]$
31	$\frac{\operatorname{sen} t}{t}$	$\arctan\frac{1}{s}$

Teoremas y propiedades diversas

1	Linearidad	$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)+\cdots+c_n f_n(t)\}=c_1F_1(s)+c_2F_2(s)+\cdots+c_nF_n(t)$ donde c_1, c_2, ... c_n son constantes
2	Primer teorema de traslación	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=\mathcal{L}\{f(t)\}\big\vert_{s\to s-a}=F(s)\vert_{s\to s-a}=F(s-a)$ $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=e^{at}f(t)$
3	Segundo teorema de traslación donde la función escalón unitario es $\mathcal{U}(t-a)=\begin{cases}0, & 0\le t<a\\ 1, & t\ge a\end{cases}$	$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\}=e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}=e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\vert_{t\to t-a}\}\mathcal{U}(t-a)=f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$
4	Función multiplicada por t^n (derivada de transformada)	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}=(-1)^n\dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$
5	Función dividida entre t (integral de transformada)	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(s)ds$
6	Transformada de derivada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{df}{dt}\right\}=sF(s)-f(0)$ $\mathcal{L}\left\{\dfrac{d^2f}{dt^2}\right\}=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$ $\mathcal{L}\left\{\dfrac{d^nf}{dt^n}\right\}=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$
7	Transformada de integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\}=\dfrac{F(s)}{s}$
8	Teorema de convolución donde la integral de convolución es $f*g\equiv\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$\mathcal{L}\{f*g\}=\mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}=F(s)G(s)$ $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=f*g$
9	Transformada de una función periódica con periodo T tal que $f(t+T)=f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}=\dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$
10	Transformada de una función periódica con periodo T tal que $g(t+T)=-g(t)$	$\mathcal{L}\{g(t)\}=\dfrac{1}{1+e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}g(t)dt$
		$\delta_a(t-t_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & t_0-a\le t\le t_0+a\\ 0, & t\le t_0-a \text{ o bien } t\ge t_0+a\end{cases}$ $\mathcal{L}\{\delta_a(t-t_0)\}=e^{-st_0}\dfrac{e^{sa}-e^{-sa}}{2sa}$
11	Función delta de Dirac $\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & t=t_0\\ 0, & t\ne t_0\end{cases}$	$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}=e^{-st_0}$
12	Derivada de la función delta (función doble impulso)	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{d}{dt}\delta(t-t_0)\right\}=se^{-st_0}$
13	Teorema del valor inicial	$\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}[sF(s)]$
14	Teorema del valor final	$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}[sF(s)]$