Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán

Campo 4

<u>Guía de resolución de ejercicios</u>

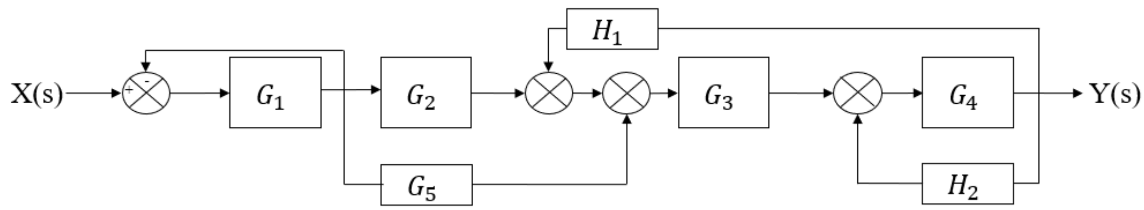
Profesor: David Tinoco Verela

Alumno: Héctor Guillermo Escobedo Martínez

Índice

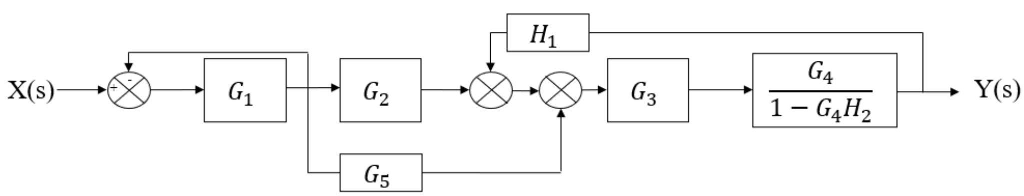
Simplificación del siguiente diagrama de bloques

Para la resolución de este ejercicio utilizaremos la tabla 2.1 "Reglas para la reducción de diagramas de bloques" que se encuentra en el anexo del documento.



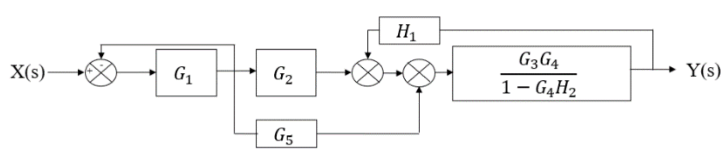
1. Comenzaremos simplificando la función G_4 y H_2, para ello utilizaremos la regla número 13 que indica que para la eliminación de una malla de retroalimentación podemos reducir estos dos bloques con la siguiente operación $\frac{G_1}{1 \mp G_1 G_2}$ siendo en este caso nuestra G_1la equivalente a G_4 y G_2 equivalente a H_2, sabiendo esto y teniendo en cuenta que para definir el signo correspondiente a $\mp$ debemos considerar el signo opuesto al de la retroalimentación.

   En este caso suponemos que el signo de la retroalimentación es "+" porque no contamos con su ilustración en el diagrama. Sustituyendo datos obtenemos entonces:

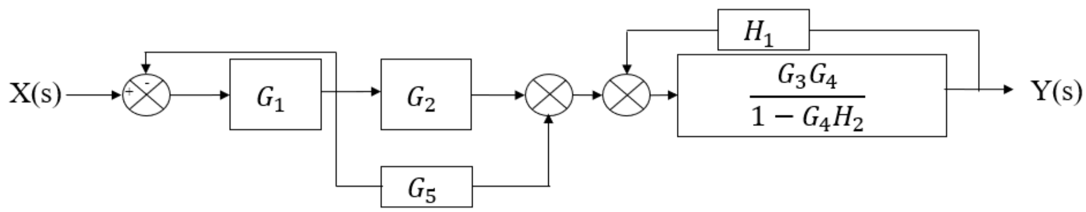
   El nodo en al que se conectaba H_2 desaparece debido a la simplificación hecha.

2. El siguiente paso será la simplificación del bloque $\frac{G_4}{1-G_4 H_2}$ y G_3 que podemos hacer siguiendo la regla número cuatro, que es la combinación de bloques en cascada, el bloque resultante de esta combinación, en este caso será el resultado de la multiplicación de ambos bloques; por tanto, tenemos un nuevo bloque llamado: $\frac{G_3 G_4}{1-G_4 H_2}$.

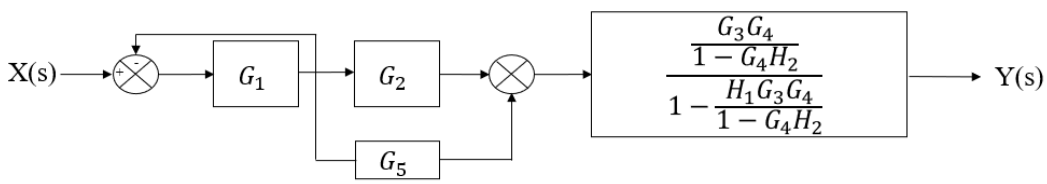
   

3. Podemos observar que en este punto de la simplificación los nodos que conectan a G_5 y H_1 nos impiden seguir con la simplificación del diagrama por su ubicación, para poder seguir simplificando el diagrama; acomodaremos los nodos de tal forma que tengamos

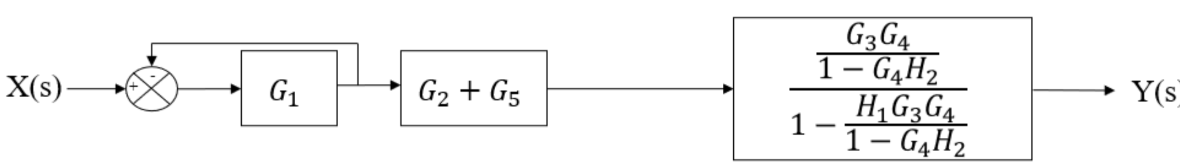
una retroalimentación simplificable entre los bloques $\frac{G_3G_4}{1-G_4H_2}$ y H_1 y una combinación de bloques en paralelo entre G_5 y G_2. La regla que nos ayudará a hacer lo anterior es la regla uno que nos muestra el reordenamiento de los puntos de suma (nodos), para aplicar esta formula solo debemos cambiar los lugares de dichos puntos manteniendo sus signos de entrada iguales, en este caso estos signos son “+” porque no contamos con un signo de forma gráfica que nos indique que en alguno de estos casos hay una resta, a continuación se muestra el diagrama resultante de este reordenamiento de puntos de suma:



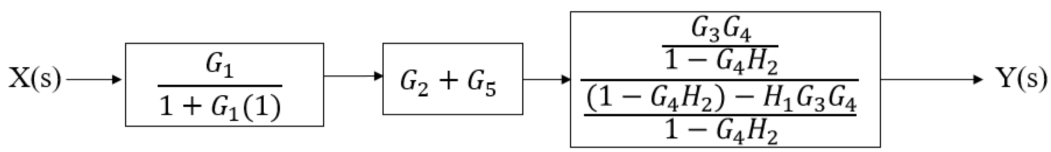
4. Una vez hecho el reordenamiento del paso anterior, vamos a simplificar los bloques $\frac{G_3G_4}{1-G_4H_2}$ y H_1 teniendo en cuenta las mismas consideraciones que tuvimos en el paso uno de nuestro procedimiento de acuerdo con la regla 13, obteniendo entonces un nuevo bloque con el siguiente valor:



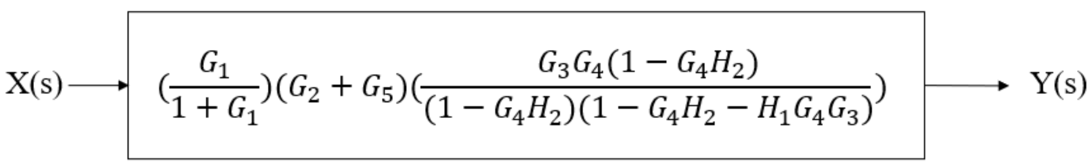
5. Simplificaremos los bloques G_5 y G_2, la relación existente entre estos bloques es una combinación de bloques en paralelo, esto se debe a que el flujo del bloque G_5 no corresponde al de una retroalimentación; ya que, va en el mismo sentido que el flujo principal del diagrama; debido a lo anterior, haremos uso de la regla número cinco que indica que la simplificación de estos dos bloques en uno nuevo y único debe ser la suma de ambos bloques; es decir, $G_5 + G_2$. Teniendo un diagrama simplificado de la siguiente manera:



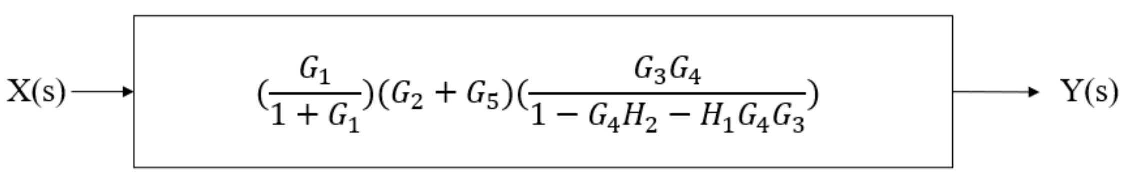
6. Nuestro diagrama en este punto tiene únicamente una retroalimentación existente entre el punto de suma del inicio y nuestro bloque G_1, dicha retroalimentación tiene un valor de “1” esto se debe a que no tenemos ningún bloque en ella que nos indique que tiene un valor especifico; por ello, tomaremos en cuenta un valor de “1”. Simplificaremos estos bloques de la misma manera que en los pasos uno y cuatro pero, debemos tener en cuenta que en esta ocasión tenemos un signo “-“ en nuestro punto de suma el cual repercute en el signo que consideraremos en el denominador de nuestro bloque en el cual debemos usar el signo opuesto al que tenemos en nuestra retroalimentación; por tanto, en este caso el signo será “+” y tendremos el siguiente bloque: $\frac{G_1}{1+G_1(1)}$.



7. Simplificando la división de fracciones que tenemos en nuestro extremo derecho (multiplicando extremos por extremos e internos por internos) y aplicando la regla cuatro entre los tres bloques existentes que es la combinación de bloques en cascada obtenemos entonces el siguiente diagrama:

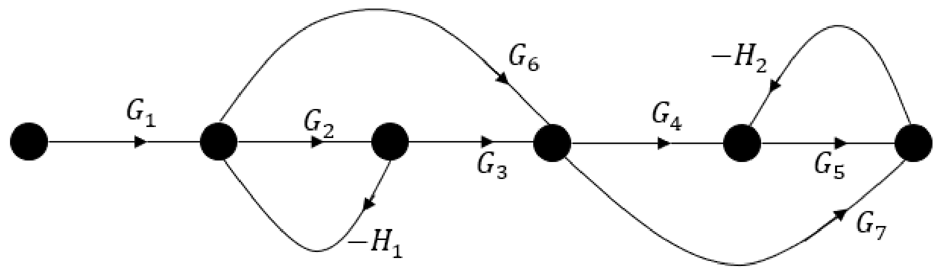


8. Simplificando la fracción que tenemos en el extremo derecho podemos eliminar el $1 - G_4H_2$ de su numerador y denominador; ya que, forman un “uno algebraico”. De esta manera obtendremos nuestro diagrama de bloques simplificado como se muestra a continuación:

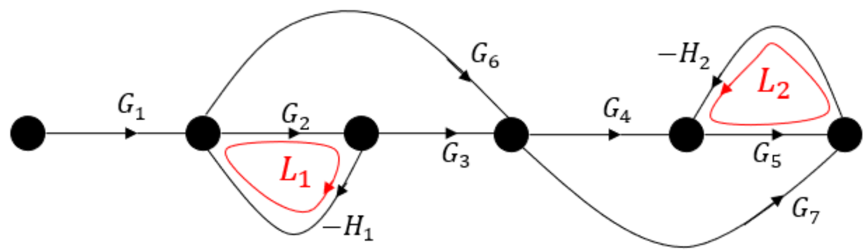


Fórmula de Mason

Dado el siguiente reograma, obtener la función de transferencia usando el teorema de Mason.



1. Identificaremos todos los lazos existentes en nuestro reograma, en este caso tenemos únicamente dos lazos que son producidos por las retroalimentaciones de $-H_1$ y $-H_2$, debemos tener en cuenta que para definir a un lazo su recorrido desde cualquier punto del reograma debe ser capaz de volver a su punto inicial; es decir, que la trayectoria siga un "ciclo". Los lazos del circuito fueron marcados por las líneas rojas, las cuales nos ayudan a observar sus trayectorias cerradas y cíclicas, así como su sentido.



2. Definiremos los lazos existentes en nuestro sistema llamándolos "L" igualándolos con las trayectorias del recorrido del lazo indicando los puntos a través de los cuales pasan respetando sus signos:
   - $L_1 = -G_2H_1$: Es el primer lazo que tenemos en nuestro reograma, este tiene su trayectoria inicial en G_2 y pasando posteriormente a través de $-H_1$ para después llegar a su punto de inicio de nuevo y repetir el ciclo.
   - $L_2 = -G_5H_2$: de la misma manera que en el caso anterior, en esta ocasión tenemos una trayectoria cíclica que podemos visualizar entre $-H_2$ y G_5; respetando el signo de H_2 el lazo quedaría definido de la manera expuesta al inicio.
3. Definiremos todas las trayectorias directas posibles que tenemos en nuestro reograma para lograr llegar a la salida, las salidas las llamaremos "P", a continuación, escribiremos cada uno de estos caminos:
   - $P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5$: Esta es la trayectoria principal, podemos ver que la trayectoria inicia en G_1, posteriormente pasa directamente a G_2, G_3, G_4 y por último llega a G_5.

- $P_2 = G_1G_6G_4G_5$: En esta trayectoria vemos un cambio con respecto a la primera, aquí después de pasar a través de G_1la trayectoria se desvía hacia G_6, evitando así tener que pasar a través de G_2 y G_3 pasando directamente hacía G_4 y G_5 y finalmente, a la salida.
- $P_3 = G_1G_6G_7$: En esta trayectoria seguimos el inicio de la anterior, pero, tenemos una desviación tomando a G_7 directamente para poder llegar a la salida, evitando así a G_4 y G_5.
- $P_4 = G_1G_2G_3G_7$: A través de esta trayectoria pasamos directamente por los tres primeros puntos de la rama principal, siendo estos G_1, G_2 y G_3 tomando por último a G_7 como ultimo punto para lograr llegar a la salida.

Estas serían las únicas trayectorias posibles en nuestro reograma, si analizamos el circuito podemos notar que en caso de tomar algunas rutas diferentes estaríamos cruzando a través de los lazos; lo cual, es imposible debido a que solo debemos tomar en consideración las trayectorias lineales que no requieran repetir el recorrido en alguno de los puntos del circuito, descartando de esta manera posibles trayectorias que utilicen nuestros lazos.

4. Una vez identificados todos los lazos y trayectorias de salida encontraremos los cofactores de cada uno de estos trayectos como se muestra continuación:
   - $\Delta_1 = 1$ En este caso, debido a que todos los lazos, en este caso L_1 y L_2 tocan en algún momento la trayectoria definida por P_1, en el caso del lazo uno, toca a esta trayectoria entre los nodos antes y después de G_2 y el lazo dos en los nodos que se encuentran antes y después de G_5; por tanto, no podemos restar ninguno de estos lazos.
   - $\Delta_2 = 1$ De igual manera que en caso anterior, ambos lazos tocan la trayectoria definida por P_2, en el caso del primer lazo, toca el nodo que se encuentra después de G_1 y posteriormente el lazo dos toca la trayectoria en los mismos pintos que en el caso anterior.
   - $\Delta_3 = 1$ En este caso el lazo uno toca a la trayectoria de P_3 en el mismo punto que en la trayectoria pasada mientras que el segundo lazo, toca la trayectoria en el ultimo nodo, el cual es la salida del sistema en el que se suma G_7.
   - $\Delta_4 = 1$ El lazo número uno toca la trayectoria P_4 en los mismos puntos que a P_1 y P_2, mientras que el lazo dos, toca a la trayectoria de P_4 en el mismo punto que en caso anterior, en el nodo de salida en el cual se suma G_7.
5. Definiremos la Δ general del circuito, para ello sabemos que debe ser: $\Delta = 1 - \sum L + \sum L_iL_j - \sum L_iL_jL_k$ ... En este caso, debido a que no contamos con tres o más lazos la ultima parte de la ecuación se despreciará, recordemos que la primera sumatoria indica la suma de todos los lazos del reograma, posteriormente se suman la sumatoria del producto de los lazos que no se tocan entre sí, en este caso, ninguno de nuestros lazos se unen entre sí en ningún punto; ya que, se encuentran en extremos opuestos, lo cual,

hace imposible que puedan tocarse entre sí. La expresión final sería entonces: $\Delta = \mathbf{1} - (\boldsymbol{L_1} + \boldsymbol{L_2}) + \boldsymbol{L_1 L_2}$.

6. De acuerdo con la formula general de Mason sabemos que:

$$G(S) = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3 + P_4\Delta_4}{\Delta}$$

Sustituiremos los datos recabados en los pasos anteriores en la ecuación anterior, así tendremos:

$$G(S) = \frac{(G_1G_2G_3G_4G_5)(1) + (G_1G_6G_4G_5)(1) + (G_1G_6G_7)(1) + (G_1G_2G_3G_7)(1)}{1 - (-G_2H_1 - G_5H_2) + [(-G_5H_2)(-G_2H_1)]}$$

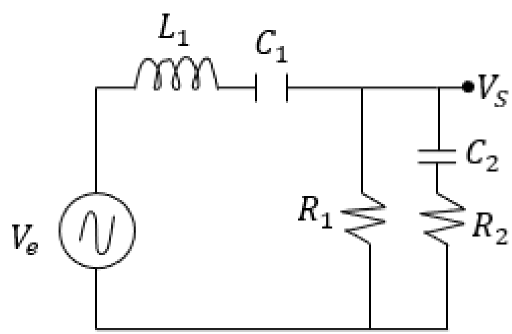
Simplificando la ecuación tenemos:

$$G(S) = \frac{(G_1G_2G_3G_4G_5) + (G_1G_6G_4G_5) + (G_1G_6G_7) + (G_1G_2G_3G_7)}{1 + G_2H_1 + G_5H_2 + G_5H_2G_2H_1}$$

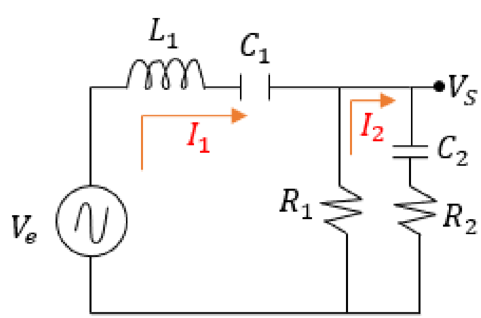
La ecuación anterior corresponde a la función de transferencia de nuestro circuito.

Modelado de sistemas

Dado el siguiente circuito eléctrico, obtener la ecuación de transferencia del circuito.



1. Apoyándonos de la teoría de mallas de Kirchhoff definiremos las ecuaciones de las dos mallas que conforman el circuito eléctrico visto anteriormente:



<u>Ecuaciones</u>:

- Malla 1: $V_e = L_1 \frac{dI_1(t)}{dt} + \frac{1}{C_1}\int I_1 dt + R_1 I_1 - R_1 I_2$
- Malla 2: $0 = R_1 I_2 + R_2 I_2 + \frac{1}{C_2}\int I_2 dt - R_1 I_1$

2. Es necesaria definir una ecuación que represente el valor de Vs, lo anterior para poder establecer nuestra función de transferencia y poder relacionar las ecuaciones entre sí; por tanto, en esta ocasión definiremos a Vs como:
    - $V_S = \frac{1}{C_2}\int I_2 dt + R_2 I_2$
3. Aplicaremos Laplace a las tres ecuaciones anteriores obteniendo así las siguientes ecuaciones:
    - $V_e = L_1\mathcal{L}\{\frac{dI_1(t)}{dt}\} + \frac{1}{C_1}\mathcal{L}\{\int I_1 dt\} + R_1\mathcal{L}\{I_1\} - R_1\mathcal{L}\{I_2\}$
    - $V_e = L_1 S I_1(S) + \frac{I_1(S)}{C_1 S} + R_1 I_1(S) - R_1 I_2(S) \ldots.\ 1$
    - $0 = R_1\mathcal{L}\{I_2\} + R_2\mathcal{L}\{I_2\} + \frac{1}{C_2}\mathcal{L}\{\int I_2 dt\} - R_1\mathcal{L}\{I_1\}$
    - $0 = R_1 I_2(S) + R_2 I_2(S) + \frac{I_2(S)}{C_2 S} - R_1 I_1(S) \ldots..\ 2$
    - $V_S = \frac{1}{C_2}\mathcal{L}\{\int I_2 dt\} + R_2\mathcal{L}\{I_2\}$
    - $V_S = \frac{I_2(S)}{C_2 S} + R_2 I_2(S) \ldots\ldots\ 3$
4. Una vez obtenidas las ecuaciones 1, 2 y 3, procederemos a factorizar las corrientes de las ecuaciones, esto lo haremos para poder facilitar la función de transferencia más adelante.
    - $V_e = I_1(S)\left[L_1 S + \frac{1}{C_1 S} + R_1\right] - R_1 I_2(S) \ldots.\ 4$
    - $0 = I_2(S)[R_1 + R_2 + \frac{1}{C_2 S}] - R_1 I_1(S) \ldots\ 5$
    - $V_S = I_2(S)[\frac{1}{C_2 S} + R_2] \ldots..\ 6$
5. Despejaremos a $I_1(S)$ de la ecuación cinco, despejaremos esta variable debido a que la corriente que interfiere en el calculo del voltaje de salida es $I_2(S)$; por tanto, es necesario poder eliminar esta corriente más adelante para definir nuestra función de transferencia en valores de únicamente nuestros componentes; por ello, despejaremos dicha corriente y posteriormente la sustituiremos en la ecuación cuatro, dejando esa ecuación en términos de únicamente $I_2(S)$.

    Utilizaremos la ecuación cinco para el despeje de la corriente $I_1(S)$ debido a que esa ecuación no representa una relación entre Vs y Ve, las cuales definirán nuestra función de transferencia; por eso usaremos la ecuación cinco como un apoyo para lograr llegar a la relación que buscamos entre ambos voltajes.

$$I_1(S) = \frac{I_2(S)[R_1 + R_2 + \frac{1}{C_2 S}]}{R_1}$$

Simplificando más la ecuación anterior, simplificando la división y suma de fracciones tenemos:

$$I_1(S) = I_2(S)\frac{R_1C_2S+R_2C_2S+1}{R_1C_2S} \ldots 7$$

6. Sustituyendo el valor de $I_1(S)$ en la ecuación siete en la ecuación cuatro obtenemos:

$$V_e = [I_2(S)\frac{R_1C_2S + R_2C_2S + 1}{R_1C_2S}]\left[L_1S + \frac{1}{C_1S} + R_1\right] - R_1I_2(S)$$

Simplificando la ecuación tenemos:

$$V_e = [I_2(S)\frac{R_1C_2S + R_2C_2S + 1}{R_1C_2S}]\left[\frac{L_1SC_1S+R_1C_1S + 1}{C_1S}\right] - R_1I_2(S)$$

Factorizaremos ahora la corriente $I_2(S)$ para simplificar un poco más la ecuación:

$$V_e = I_2(S)[(\frac{R_1C_2S + R_2C_2S + 1}{R_1C_2S})(\frac{L_1SC_1S+R_1C_1S + 1}{C_1S}) - R_1]$$

7. Sabiendo que la función de transferencia es $\Delta = \frac{Vs}{Ve}$, ahora, con la última ecuación obtenida en el paso anterior en conjunto con la ecuación número seis, obtendremos la función de transferencia del sistema.

$$\Delta = \frac{I_2(S)[\frac{1}{C_2S} + R_2]}{I_2(S)[(\frac{R_1C_2S + R_2C_2S + 1}{R_1C_2S})(\frac{L_1SC_1S+R_1C_1S + 1}{C_1S}) - R_1]}$$

Observamos que la corriente $I_2(S)$ en el denominador y numerador forman un “uno algebraico”, lo cual hace que ambas desaparezcan de la ecuación, obteniendo la siguiente ecuación:

$$\Delta = \frac{\frac{1}{C_2S} + R_2}{(\frac{R_1C_2S + R_2C_2S + 1}{R_1C_2S})(\frac{L_1SC_1S+R_1C_1S + 1}{C_1S}) - R_1}$$

Simplificando la ecuación anterior tenemos:

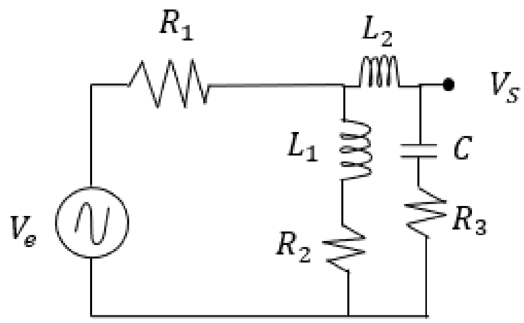
$$\Delta = \frac{\frac{1 + R_2C_2S}{C_2S}}{\frac{(R_1C_2S + R_2C_2S + 1)(L_1SC_1S+R_1C_1S + 1) - R_1(R_1C_2SC_1S)}{R_1C_2SC_1S}}$$

Simplificando la división de fracciones tenemos nuestra función de transferencia completa como:

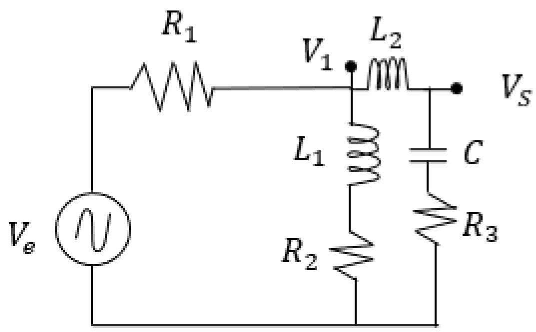
$$\Delta = \frac{(1 + R_2C_2S)(R_1C_2SC_1S)}{C_2S[(R_1C_2S + R_2C_2S + 1)(L_1SC_1S+R_1C_1S + 1) - R_1(R_1C_2SC_1S)]}$$

Representación de un circuito eléctrico en un diagrama de bloques

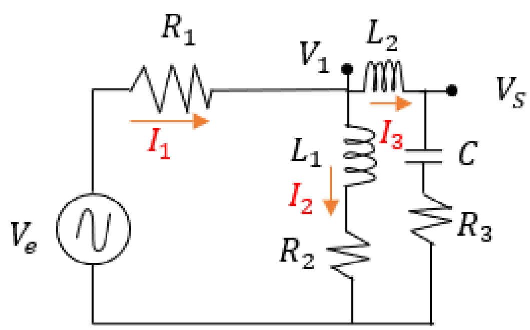
Dado el siguiente circuito eléctrico, realizar el diagrama de bloques que lo representa.



1. Obtendremos las ecuaciones que relacionen el voltaje V_S con V_e, para ello nos apoyaremos de un nuevo voltaje en el circuito, el cual llamaremos V_1, este será el voltaje que se encuentra entre la resistencia uno, el inductor dos y la rama que contiene al inductor uno y la resistencia dos; este voltaje V_1 será utilizado como un punto medio para relacionar los voltajes de entrada y salida, el voltaje uno es igual que el voltaje que tenemos en la terminal de salida más la caída de voltaje que absorbe el inductor.



2. Definiremos las ecuaciones particulares para este circuito:



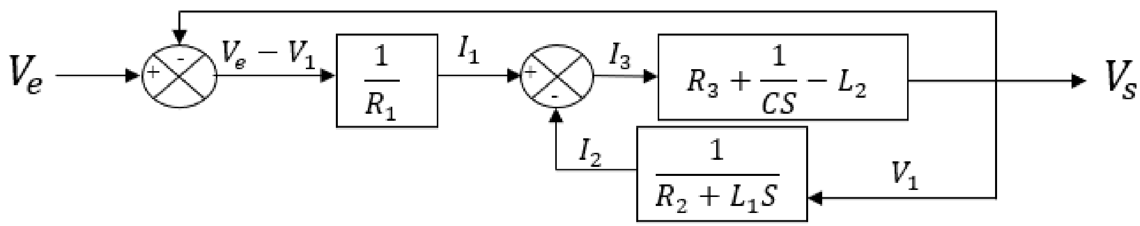
- $V_S = I_3(R_3 + \frac{1}{CS})$: En la ecuación anterior definimos el voltaje de salida, el cual tendré el valor del producto de la corriente tres, multiplicada por el valor del capacitor y la resistencia.

- $V_s = V_1 - I_3L_2$: Como se mencionó anteriormente, el valor del voltaje de salida debe ser igual al voltaje uno menos el voltaje absorbido por el inductor dos.
- $I_1 = I_2 + I_3$: Sabemos que la suma de las corrientes dos y tres debe ser igual al valor de la corriente uno; ya que, la corriente uno se divide en el nodo V_1 en dos corrientes.
- $V_1 = I_2(R_2 + L_1S)$: El valor del voltaje de este nodo sería igual al voltaje que tenemos entre la resistencia dos y el inductor uno.
- $I_1 = \frac{V_e - V_1}{R_1}$: La corriente uno se puede calcular dividiendo la diferencia de voltaje entre la fuente y el voltaje uno entre la resistencia uno.

3. Una vez definidos los parámetros necesarios para relacionar las magnitudes de voltajes y corrientes en relación con los elementos del sistema, procederemos a realizar el diagrama de bloques:
    - En la entrada tendremos el valor del voltaje de entrada, seguido colocaremos un punto de sumatoria en donde tendremos un punto de suma y otro de resta, el cual, indica que la fuente cuenta con una salida positiva y una negativa.
    - Posteriormente, la línea que sale del punto de suma tendremos el valor correspondiente a $V_e - V_1$, después colocaremos un bloque que representará la presencia de una resistencia en medio de dichos puntos y que, al dividir dicha diferencia de voltajes entre el valor de esta resistencia, obtendremos entonces el valor de la corriente uno que circula a través de esa rama del circuito que se representará al salir del bloque como I_1; ya que, la operación correspondiente a su representación ya se ha realizado ($\frac{V_e - V_1}{R_1}$).
    - Seguido de ello, encontraremos otro punto de suma, en el cual, despejando el valor de I_3 tenemos que $I_1 - I_2 = I_3$, por ello en una de las entradas de este punto tendremos un signo negativo el cual representa la entrada de la corriente dos.
    - A la salida del punto de suma anterior, tendremos la corriente I_3 representada por una línea que se dirige hacía el bloque con la suma de $R_3 + \frac{1}{CS} - L_2$ el cual a su salida tiene una línea que representará finalmente al voltaje de salida.

      Se coloca la suma de la resistencia tres y del capacitor debido a que la suma de estos dos elementos multiplicados por la corriente tres menos el producto de la corriente tres por el inductor dos representa el valor del voltaje de salida.
    - A partir de la línea representativa del voltaje de salida tenemos dos líneas nuevas, una que se une al primer punto de suma o nodo en la entrada con

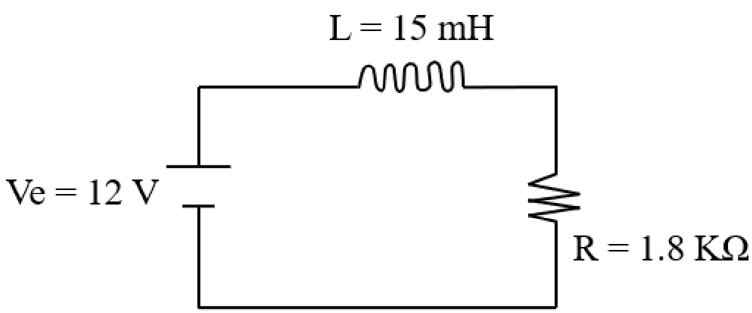
signo negativo, esto se debe a que representa el cierre del circuito en el cual los componentes se conectan a la tierra del circuito. La otra línea representa el valor del voltaje uno que se une con el bloque que contiene el valor inverso de la suma de la resistencia dos y el primer inductor; ya que, el producto inverso de dicha suma por el valor del voltaje uno da como resultado el valor de la corriente tres la cual, es representada como la línea que sale a partir del bloque de dicha suma ($\frac{1}{R_2+L_1S}$) y entra al punto de suma con el signo negativo debido a que: $I_1 - I_2 = I_3$.



Es importante tener en cuenta que, los valores de CS y LS representan el valor de la reactancia de los elementos inductivos y capacitivos, es por ello que son representados de esta manera.

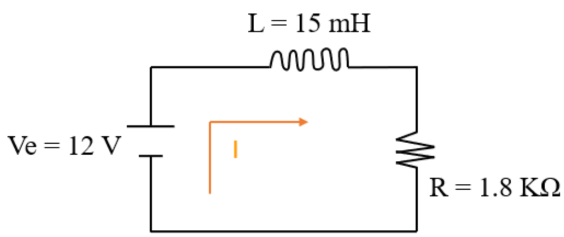
Sistemas de primer orden

Obtener la respuesta a través del tiempo del siguiente circuito, al final verificar la respuesta con una gráfica en MatLab.



Condición inicial: i(0)=3 mA

1. Para la solución de este circuito utilizaremos la ley de voltajes de Kirchhoff para plantear la ecuación que relaciona a los voltajes existentes dentro de la malla.



   Sabemos que: $V_e - V_R - V_L = 0$ …. (1)
   Desarrollaremos la ecuación uno sustituyendo los valores de los voltajes de la resistencia y el inductor por su representación por medio de la corriente.

$$V_e - Ri(t) - L\frac{di(t)}{dt} = 0 \ldots\ldots(2)$$

2. Aplicaremos $\mathcal{L}$ en la ecuación dos.

$$V_e\mathcal{L}\{1\} - R\mathcal{L}\{i(t)\} - L\mathcal{L}\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\} = 0$$

$$\frac{V_e}{S} - RI(S) - L[SI(S) - I(0)] = 0$$

3. Factorizaremos y despejaremos $I(S)$ para poder llegar a la ecuación que describa el comportamiento a través del tiempo del sistema a partir de la ecuación general de los sistemas de primer orden.

$$\frac{V_e}{S} - I(S)[R + LS] + LI(0) = 0$$

Despejando $I(S)$ de la ecuación:

$$\frac{\frac{V_e}{S} + LI(0)}{R + LS} = I(S) \ldots .(3)$$

4. Desarrollaremos la suma de fracciones existente en el numerador de la ecuación tres, posteriormente simplificaremos la nueva fracción.

$$I(S) = \frac{\frac{V_e + SLI(0)}{S}}{R + LS}$$

$$I(S) = \frac{V_e + SLI(0)}{S(R + LS)} \ldots .(4)$$

5. Separaremos la ecuación cuatro descomponiendo la suma de fracciones que representa, de esta manera buscamos simplificar más la ecuación.

$$I(S) = \frac{V_e}{S(R + LS)} + \frac{SLI(0)}{S(R + LS)}$$

$$I(S) = \frac{V_e}{S(R + LS)} + \frac{LI(0)}{R + LS}$$

6. Sustituiremos los valores reales de los elementos de la ecuación anterior.

$$I(S) = \frac{12}{S(1.8k + 15m\,S)} + \frac{15m\,(3m)}{1.8k + 15m\,S} \ldots .(5)$$

7. Normalizaremos la ecuación cinco dividiendo numeradores y denominadores de las fracciones entre $15m$ esto debido a que es el valor que acompaña a S y buscamos dejar esta variable “sola” para llegar de esta manera a la ecuación general de los sistemas de primer orden.

$$I(S) = \frac{\frac{12}{15m}}{S(\frac{1.8k}{15m} + \frac{15m}{15m}\,S)} + \frac{\frac{15m}{15m}\,(3m)}{\frac{1.8k}{15m} + \frac{15m}{15m}\,S}$$

Simplificando la ecuación anterior tenemos:

$$I(S) = \frac{800}{S(120k + S)} + \frac{3m}{120k + S} \ldots .(6)$$

8. Utilizaremos fracciones parciales para simplificar la primera fracción de la ecuación seis, esto nos ayudará a descomponer dicha ecuación y poder simplificarla.

$$\frac{800}{S(120k + S)} = \frac{A}{S} + \frac{B}{(120k + S)}$$

Para obtener el valor de A:

$$A = \left| S \cdot \frac{800}{S(120k + S)} \right|_{S=0} = \frac{800}{120k + 0} = 6.67m$$

El valor en el cual se evaluará S en este caso es cero debido a que como podemos ver el denominador de $\frac{A}{S}$ tiene solamente el término S, al igualar $s = 0$ obtenemos este valor de su despeje.

Para obtener el valor de B:

$$B = \left|(120k + S) \cdot \frac{800}{S(120k + S)}\right|_{S=-120k} = \frac{800}{-120k} = -6.67m$$

En este caso el valor en el cual se evaluará S es de -120k debido a que el denominador de la fracción en la que se encuentra B es $120k + S$, al igualar lo anterior con cero y despejar a S obtenemos $s = -120k$.

9. Sustituiremos los valores de A y B en la ecuación seis y simplificaremos la ecuación resultante.

$$I(S) = \frac{6.67m}{S} - \frac{6.67m}{120k + S} + \frac{3m}{120k + S}$$

$$I(S) = \frac{6.67m}{S} - \frac{3.67m}{120k + S} \dots . (7)$$

10. Aplicaremos $\mathcal{L}^{-1}$ a la ecuación siete, esto para obtener finalmente la ecuación del sistema que describe su comportamiento a través del tiempo.

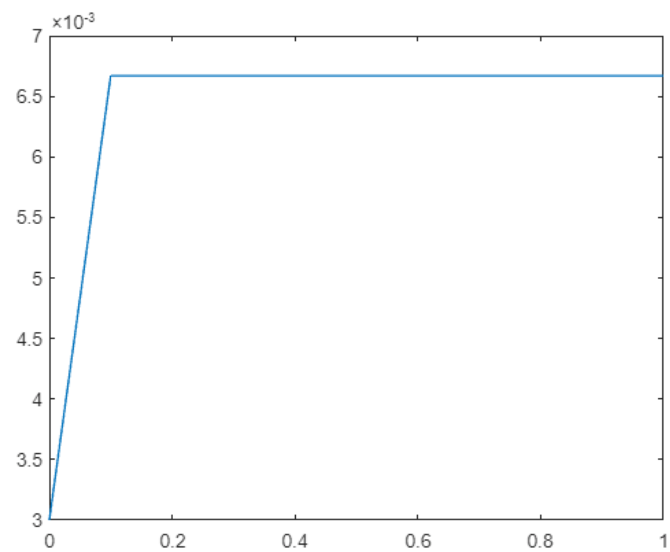
$$\mathcal{L}^{-1}\{I(S)\} = 6.67m\, \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\} - 3.67m\, \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{120k + S}\right\}$$

$$i(t) = 6.67m(1) - 3.67me^{-120k \cdot t}$$
$$i(t) = 6.67m - 3.67me^{-120k \cdot t}$$

11. Graficando la función anterior en Matlab obtenemos:

El código utilizado para la gráfica es el siguiente:

- x=0:0.1:1;
  y=0.00667-(0.00367.*exp(-120000*x));
  plot(x,y)



La gráfica anterior confirma que nuestra ecuación es correcta; ya que, muestra el inicio de la función en 3mA y posteriormente su evolución a través del tiempo.

Sistemas de segundo orden

A partir de la siguiente ecuación, obtener la señal de salida.

$$F.T. = \frac{5.022}{S^2 + 3.1956\,S + 5.022}$$

Tomando como guía las siguientes ecuaciones podremos conocer el comportamiento de la señal de salida a partir de su ecuación de transferencia.

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \qquad tp = \frac{\pi}{\omega_d} \qquad ts = \frac{4}{\sigma} \quad \sigma = \zeta\omega_n \quad tr = \frac{\pi-\beta}{\omega_d} \quad M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi}$$

$$\beta = tg^{-1}\left(\frac{\omega_d}{\sigma}\right)$$

Sabemos también que la ecuación representativa de los sistemas de segundo orden es:

$$F.T. = \frac{{\omega_n}^2}{S^2 + 2\zeta\omega_n S + {\omega_n}^2}$$

A partir de las ecuaciones anteriores comenzaremos a obtener los parámetros de la función de transferencia para conocer su comportamiento en la salida:

$${\omega_n}^2 = 5.022 \quad \therefore \quad \omega_n = \sqrt{5.022} = 2.241$$

Por otra parte, sabemos que $2\zeta\omega_n$ es igual a 3.1956; por tanto, despejando a ζ tendremos:

$$\zeta = \frac{3.1956}{2(2.241)} = 0.7133$$

<u>Debido a que el valor de ζ es de 0.7133 tenemos un sistema subamortiguado con dos polos complejos conjugados.</u>

Conociendo ζ y ω_n también podemos obtener ω_d y σ.

$$\omega_d = 2.241\sqrt{1-0.7133^2} = 1.5706$$

$$\sigma = 0.7133(2.241) = 1.5985$$

Con los valores de los parámetros anteriores podemos obtener el resto.

$$\beta = tg^{-1}\left(\frac{1.5706}{1.5985}\right) = 0.7766$$

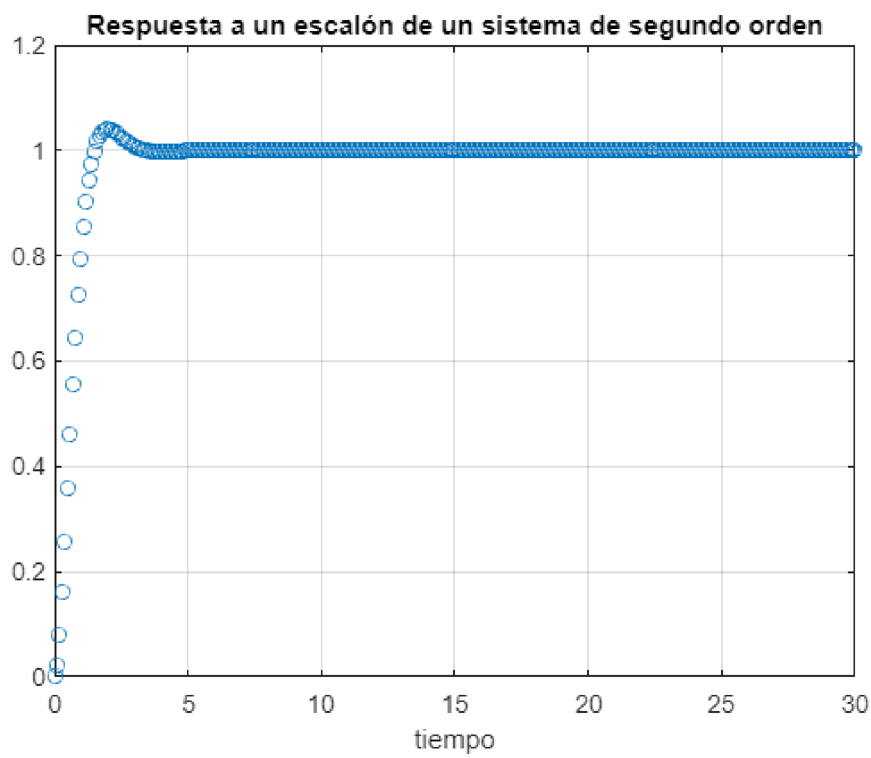
Para obtener el valor de β es necesario ajustar su calculadora en radianes.

$$tp = \frac{\pi}{1.5706} = 2.0002 \qquad ts = \frac{4}{1.5985} = 2.5023 \quad tr = \frac{\pi - 0.7766}{1.5706} = 1.5058$$

$$M_p = e^{-\left(\frac{0.7133}{\sqrt{1-0.7133^2}}\right)\pi} = 0.0409$$

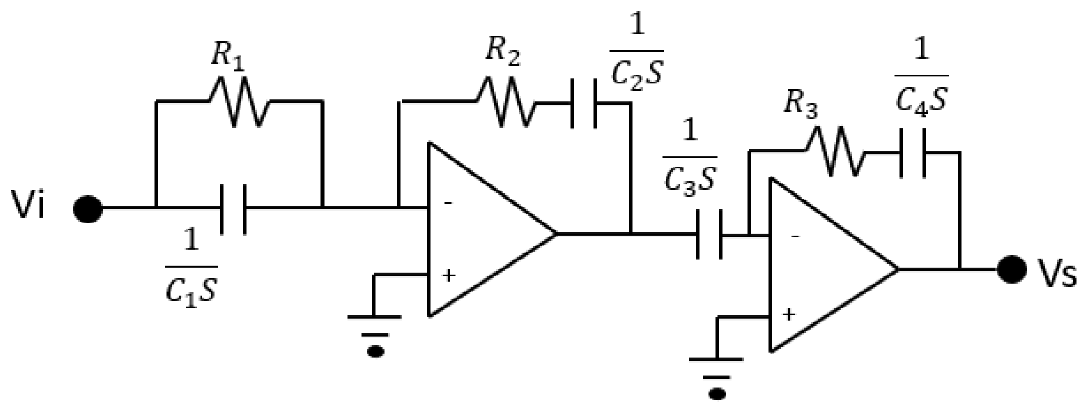
Finalmente, apoyándonos de MatLab procederemos a graficar la función de transferencia que teníamos anteriormente con el siguiente código.

```
num=[5.022];
den=[1 3.1956 5.022];
t=[0:.1:30];
ye=step(num,den,t);
plot(t, ye, 'o')
title('Respuesta a un escalón de un sistema de segundo orden');
xlabel('tiempo');
grid;
```

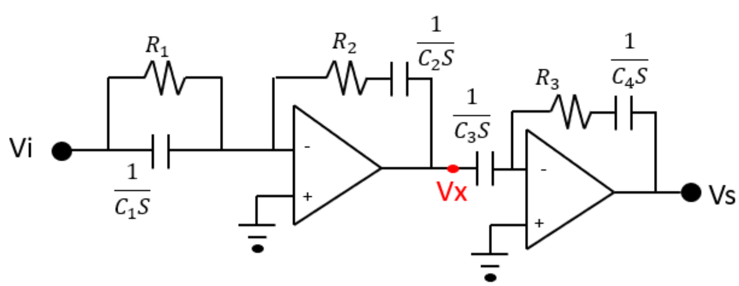


Función de transferencia de un circuito de amplificadores operacionales

Obtener la función de transferencia del siguiente circuito:



1. Agregaremos un nodo simbólico al circuito original, esto lo haremos para poder relacionar los voltajes de entrada y salida para poder obtener la función de transferencia del circuito, a este nodo lo llamaremos Vx.



2. Definiremos la manera en la que relacionaremos los voltajes del circuito para obtener la función de transferencia, como ya sabemos $\frac{V_s}{V_e}$ es la función de transferencia en cualquier circuito, en este caso nos apoyaremos del voltaje intermedio llamado V_x para relacionarlos de la siguiente manera: $\frac{V_s}{V_e} = \frac{V_x}{V_e} \cdot \frac{V_s}{V_x}$.
3. Comenzaremos simplificando el circuito de tal manera que obtendremos una impedancia equivalente entre la resistencia uno y el capacitor uno, dicha impedancia se calculará de la misma manera que en un circuito con dos resistencias en paralelo, es decir, como el producto de los elementos entre su suma.

$$Z = \frac{R_1\left(\frac{1}{C_1S}\right)}{R_1 + \frac{1}{C_1S}}$$

Simplificando la fracción anterior obtenemos:

$$Z = \frac{\frac{R_1}{C_1S}}{\frac{(R_1C_1S+1)}{C_1S}} = \frac{R_1C_1S}{(R_1C_1S+1)C_1S} = \frac{R_1}{R_1C_1S+1}$$

4. Con la impedancia anterior podremos definir finalmente la siguiente relación que tenemos en los amplificadores operacionales.

$$\frac{V_i - 0}{\frac{R_1}{R_1C_1S+1}} = \frac{0 - V_x}{R_2 + \frac{1}{C_2S}}$$

Los ceros en los numeradores de la relación anterior se deben a que los voltajes en las entradas no inversoras del amplificador son iguales a cero; ya que, tenemos conectada esta entrada a la tierra del circuito.

En los denominadores de la misma relación encontramos los valores de las impedancias equivalentes de las ramas que tenemos a la entrada y en paralelo a la salida del amplificador.

Simplificando la ecuación y despejándola para obtener $\frac{V_x}{V_e}$ tenemos:

$$\frac{V_i}{\frac{R_1}{R_1C_1S+1}} = \frac{-V_x}{\frac{R_2C_2S+1}{C_2S}}$$

$$\frac{\frac{R_2C_2S+1}{C_2S}}{\frac{R_1}{R_1C_1S+1}} = \frac{-V_x}{V_i}$$

$$\frac{(R_2C_2S+1)(R_1C_1S+1)}{R_1C_2S} = \frac{-V_x}{V_i}$$

$$\frac{-(R_2C_2S+1)(R_1C_1S+1)}{R_1C_2S} = \frac{V_x}{V_i}$$

5. De igual manera que con este primer amplificador repetiremos el proceso para el amplificador dos, con la única diferencia que en este caso la relación que buscaremos y despejaremos será la de $\frac{V_s}{V_x}$.

$$\frac{V_x - 0}{\frac{1}{C_3S}} = \frac{0 - V_s}{R_3 + \frac{1}{C_4S}}$$

Simplificando la ecuación tenemos:

$$\frac{V_x}{\frac{1}{C_3S}} = \frac{-V_s}{\frac{R_3C_4S+1}{C_4S}}$$

Despejando la relación $\frac{V_s}{V_x}$ encontramos:

$$\frac{\frac{R_3C_4S+1}{C_4S}}{\frac{1}{C_3S}} = \frac{-V_s}{V_x}$$

$$\frac{C_3S(R_3C_4S+1)}{C_4S} = \frac{-V_s}{V_x}$$

$$\frac{-C_3S(R_3C_4S+1)}{C_4S} = \frac{V_s}{V_x}$$

6. Una vez obtenidas las relaciones anteriores finalmente podemos obtener la función de transferencia del circuito de la manera en la que la habíamos planteado antes sustituyendo únicamente los valores de cada una de las relaciones.

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{V_x}{V_e} \cdot \frac{V_s}{V_x}$$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{-(R_2C_2S+1)(R_1C_1S+1)}{R_1C_2S} \cdot \frac{-C_3S(R_3C_4S+1)}{C_4S}$$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{[(R_2C_2S+1)(R_1C_1S+1)][C_3S(R_3C_4S+1)]}{R_1C_2C_4S^2}$$

Anexo

Tabla 2.1 Reglas para reducción de diagramas de bloques.

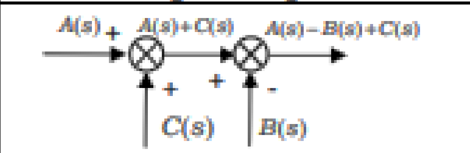
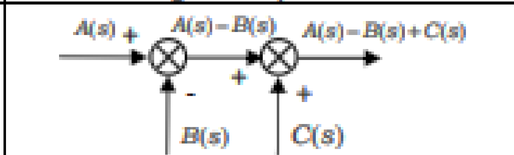
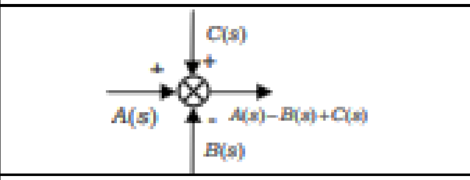
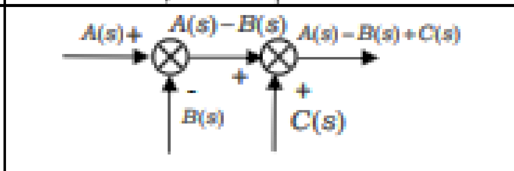
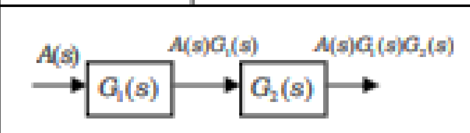
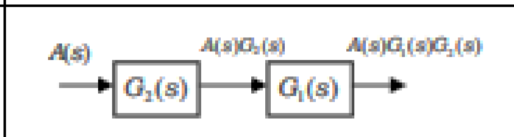
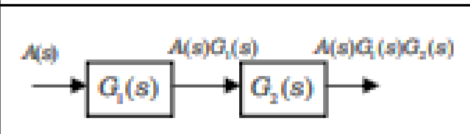
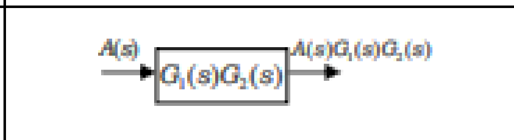
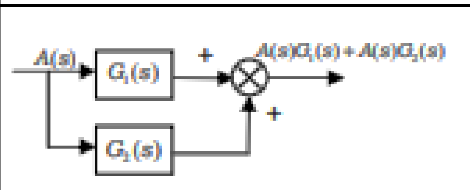
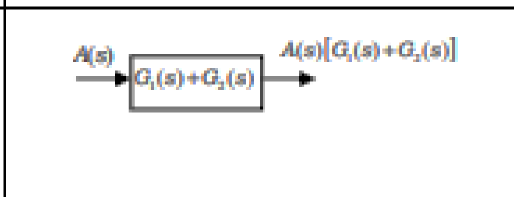
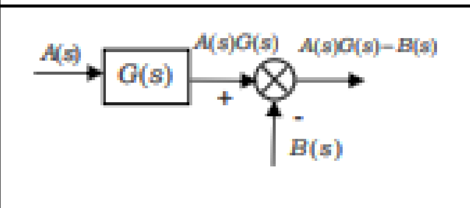
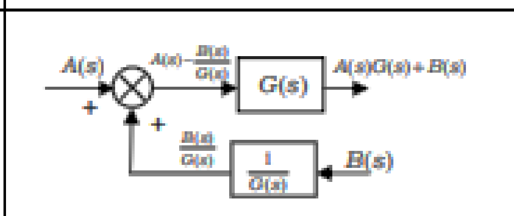
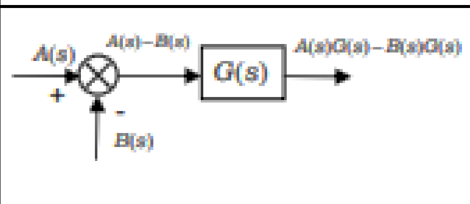
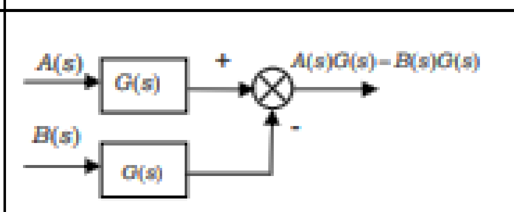
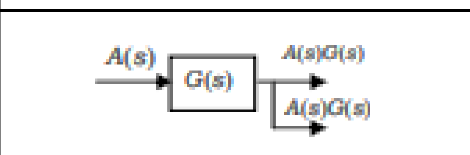
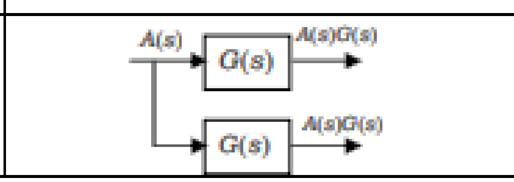
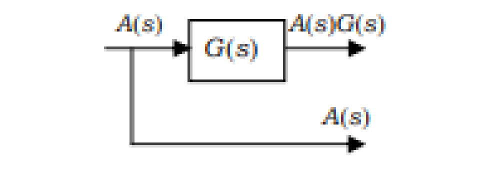
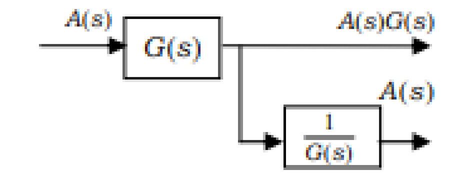
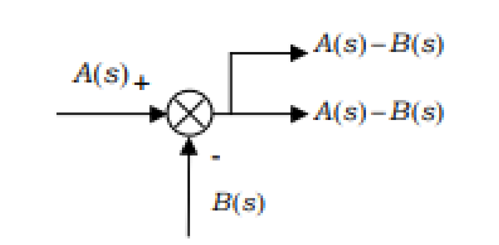
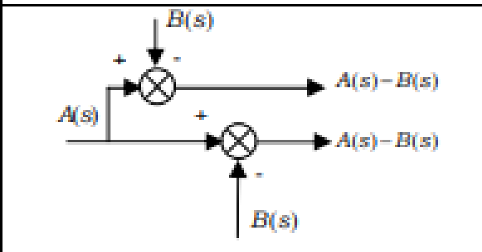
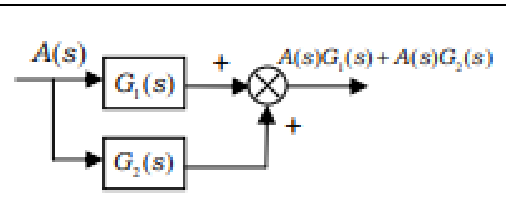
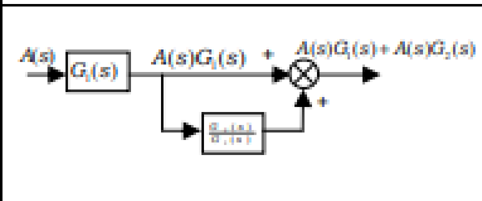
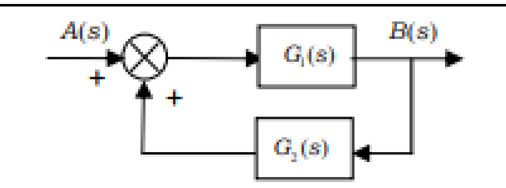
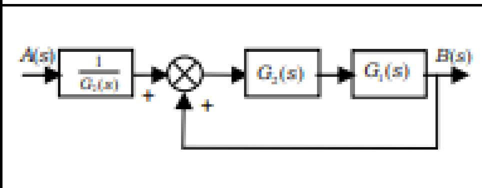
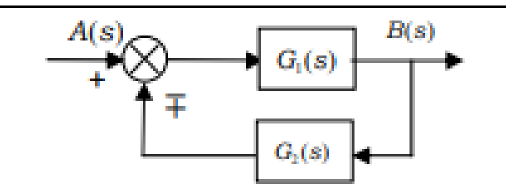
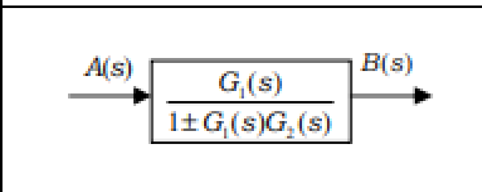
Regla	Diagrama original	Diagrama equivalente	Nombre
1			Reordenamiento de los puntos de suma.
2			Reordenamiento de los puntos de suma.
3			Reordenación de bloques en cascada.
4			Combinación de bloques en cascada.
5			Combinación de bloques en paralelo.
6			Movimiento de un punto de suma adelante de un bloque.
7			Movimiento de un punto de suma mas allá de un bloque.
8			Movimiento de un punto de toma adelante de un bloque.

Tabla 2.2 Reglas para reducción de diagramas de bloques (continuación).

<table>
<tr><th>Regla</th><th>Diagrama original</th><th>Diagrama equivalente</th><th>Nombre</th></tr>
<tr><td>9</td><td>
</td><td>
</td><td>Movimiento de un punto de toma más allá de un bloque</td></tr>
<tr><td>10</td><td>
</td><td>
</td><td>Movimiento de un punto de un punto adelante de un punto de suma</td></tr>
<tr><td>11</td><td>
</td><td>
</td><td>Remoción de un bloque de una trayectoria directa</td></tr>
<tr><td>12</td><td>
</td><td>
</td><td>Remoción de un bloque en una malla de retroalimen-tación</td></tr>
<tr><td>13</td><td>
</td><td>
</td><td>Eliminación de una malla de retro-alimentación</td></tr>
</table>